Una Introducción a la Teoría de Anillos y Módulos

Mauricio Medina-Bárcenas

21 de julio de 2021

Introducción

Estas notas empezaron como parte de mi servicio social en la Facultad de Ciencias de la UNAM por allá del año 2009. A partir de ese año he ido complementando y puliendo este manuscrito. Este texto es básicamente una traducción al español del libro "Moduln und ringe" escrito por Friedrich Kasch en 1982 en el cual estuvieron basadas las clases de Algebra Modrena 3 y 4 impartidas por el Profesor Dr. Alejandro Alvarado García a las cuales asistí durante el año 2008.

Más adelante, como profesor de asignatura de la Facultad de Ciencias de la UNAM, impartí los cursos de Algebra Moderna 3 y 4 basandome en estas notas y el libro de F. Kasch. Como producto de estas clases he ido nutriendo las notas originales de A. Alvarado y este es el resultado.

La intención de este escrito es poder tener un libro de texto básico en español para poder impartir la teoría general de módulos y anillos que usualmente se da en la Facultad de Ciencias de la UNAM.

Índice general

Notación

$\mathbb{N}$	Números naturales.
$\mathbb{Z}$	Números enteros.
$\mathbb{Q}$	Números racionales.
$\mathbb{R}$	Números reales.
$\mathbb{C}$	Números complejos.
$\mathbb{Z}_n$	Números módulo n.
$\mathbb{Z}_{p^\infty}$	p-Grupo de Prüfer.
Ab	Categoría de grupos abelianos.
R^{op}	Anillo opuesto.
$R[x_1, ..., x_n]$	Anillo de polinomios en identerminadas $x_1, ..., x_n$ con coeficientes en R.
R-Mod	Categoría de R-módulos izquierdos.
R-Simp	Conjunto de representantes de clases de isomorfismo de R-módulos simples.
${}_RM$ (resp. M_R)	M es un R-módulo izquierdo (resp. derecho).
$N \leq M$	N es submódulo de M.
$N < M$	N es submódulo propio de M.
$M_n(R)$	Anillo de matrices de $n \times n$ con coeficientes en R.
M/N	Módulo cociente.
$Sub(M)$	Conjunto de submódulos del módulo M.
$\ell(X)$	Submódulo generado por el conjunto X.
$(N : x)$	Trasladado por la izquierda de x a N.
$(N : L)$	Trasladado por la izquierda de L a N.
$(0 : x)$	Ideal anulador izquierdo de x.
$\mathrm{Zoc}(M)$	Zoclo del módulo M.
$\mathrm{Rad}(M)$	Radical del módulo M.
$N << M$	N es superfluo en M.
$N \leq_e M$	N es esencial en M.
$M^{(I)}$	Suma directa de copias del módulo M indicadas en el conjunto I.
M^I	Producto directo de copias del módulo M indicadas en el conjunto I.
$E(M)$	Cápsula inyectiva del módulo M.
$M \oplus N$	Suma directa de los módulos M y N.
$A \times B$	Producto cartesiano de A y B.
$\bigoplus$	Suma directa.
$\prod$	Producto directo
$\coprod$	Coproducto.
$\mathrm{Hom}_R(M, N)$	Conjunto de R-morfismos de M en N.

$\mathrm{End}_R(M)$	Conjunto de endomorphimos del R-módulo M.
Id_M	Morfismo identidad del módulo M.
$\rightarrowtail$	Monomorfismo.
$\twoheadrightarrow$	Epimorfismo.
$\hookrightarrow$	Inclusión.
$\mathrm{Ker}\,\varphi$	Núcleo del morfismo φ.
$\mathrm{Im}\,\varphi$	Imagen del morfismo φ.
$M \otimes_R N$	Producto tensorial de los módulos M y N sobre el anillo R.
$\mathrm{Coker}\,\varphi$	Conúcleo del morfismo φ.
$(\_ \cdot x)$	Morfismo multiplicar por x por la izquierda.
$\bigvee X$	Supremo del conjunto X.
$\bigwedge X$	Infimo del conjunto X.
$\mathcal{O}(X)$	Marco de conjuntos abiertos del espacio topológico X.
$Obj(\mathcal{C})$	Objetos de la categoría $\mathcal{C}$.
$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$	Morfismos en la categoría $\mathcal{C}$ entre los objetos A y B.

Capítulo 1

Definición de R-Módulo

Definición 1.0.1. Un *anillo* con uno es una quinteta $(R, +, *, 0, 1)$ donde R es un conjunto y se satisface lo siguiente:

1. $(R, +, 0)$ es un grupo abeliano

2. $(R, *, 1)$ es un monoide

3. $r * (s + t) = r * s + r * t$
   $(s + t) * r = s * r + t * r$

Definición 1.0.2. Si R y S son anillos con uno, una función $\varphi : R \to S$ es un *morfismo de anillos* si:

1. $\varphi(r + s) = \varphi(r)\overline{+}\varphi(s)$

2. $\varphi(rs) = \varphi(r) * \varphi(s)$

3. $\varphi(1_R) = 1_S$

A partir de aquí R denotará a un anillo asociativo con uno

Definición 1.0.3. Sea $(M, +, 0)$ un grupo abeliano. Un endomorfismo de M es un morfismo de grupos abelianos $\varphi : M \to M$. Denotemos $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(M) = \{\varphi \mid \varphi \text{ endomorfismo de } M\}$.

Sean $\varphi, \psi \in \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(M)$.

$$\varphi \widehat{+} \psi : \quad \begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & M \\ x & \longmapsto & \varphi(x) + \psi(x) \end{array} \qquad -\varphi : \quad \begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & M \\ x & \longmapsto & -\varphi(x) \end{array}$$

$$\widehat{0} : \quad \begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & M \\ x & \longmapsto & 0 \end{array} \qquad \varphi \circ \psi : \quad \begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & M \\ x & \longmapsto & \varphi(\psi(x)) \end{array}$$

$$1_M : \quad \begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & M \\ x & \longmapsto & x \end{array}$$

Entonces $\left(\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(M), \widehat{+}, \circ, \widehat{0}, 1_M\right)$ es un anillo.

Definición 1.0.4. Sea R un anillo. La pareja (M, λ) es un R-*módulo* izquierdo denotado ${}_RM$, si $\left(M, \overline{+}, \overline{0}\right)$ es un grupo abeliano y $\lambda : R \to \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(M)$ es un morfismo de anillos y se satisface lo siguiente:

1. $\forall r \in R$
$$\lambda(r) : \quad \begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & M \\ x & \longmapsto & \lambda(r)(x) := rx \end{array}$$
es un endomorfismo.

2. $\lambda(r+s) = \lambda(r) \widehat{+} \lambda(s)$
$\forall x \in M$ $\lambda(r+s)(x) = \lambda(r)(x) \overline{+} \lambda(s)(x) := (r+s)x = rx \overline{+} sx$

3. $\lambda(r * s) = \lambda(r) \circ \lambda(s)$
$\forall x \in M$ $\lambda(r * s)(x) = \lambda(r)(\lambda(s)(x)) := (r * s)x = r(sx)$

4. $\lambda(1_R) = Id_M$
$\forall x \in M$ $\lambda(1_R)(x) = x := 1_R x = x$

Ejemplo 1.0.5. (i) Como ejemplos básicos de R-módulos están los siguientes. Tomemos

$$\varphi : \quad \begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(R_+) \\ r & \longmapsto & \varphi(r) : \quad \begin{array}{ccc} R_+ & \longrightarrow & R_+ \\ x & \longmapsto & \varphi(r)(x) := rx \end{array} \end{array}$$

donde R_+ es la parte aditiva del anillo $(R, +, 0)$. Con esta φ tenemos que R es un R-módulo sobre si mismo ${}_R R$.

(II) Si $R = \mathbb{Z}$ y S es un anillo existe un único morfismo de anillos

$$\mathbb{Z} \longrightarrow S$$

$$1 \longmapsto 1_S$$

$$n \longmapsto 1_S + 1_S + ... + 1_S (n \quad veces)$$

Como $n = 1 + 1 + ... + 1$ el morfismo es único por que ya está determinado en 1.

Si M es un grupo abeliano

$$\lambda : \quad \mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(M)$$

$$1 \longmapsto Id_M$$

$$n \longmapsto \lambda(n) : \quad M \longrightarrow M$$

$$x \longmapsto \lambda(n)(x) := nx$$

Como λ es único y $\lambda(n)(x) = (Id_M + ... + Id_M)(x) = x + ... + x := nx$, entonces todo grupo abeliano es un $\mathbb{Z}$-módulo.

Es posible dar otra definición de R-módulo izquierdo, enfocandonos sólo en la acción del anillo R en el grupo abeliano M.

Definición 1.0.6. Sea R un anillo y $(M, \mp, 0)$ un grupo. Si existe una acción

$$R \times M \longrightarrow M$$

$$(r, x) \longrightarrow rx$$

que cumple:

1. $r(x \mp y) = rx \mp ry$
2. $(r + s)x = rx \mp sx$
3. $(r * s)x = r(sx)$
4. $1x = x$

se dice que M es un R-módulo izquierdo, denotado ${}_RM$.

Observación 1.0.7. En la definición anterior no se pide que M sea un grupo abeliano porque la conmutatividad de la operación $\overline{+}$ se deduce de las condiciones de la acción de R en M.

Demostración. Sean $a, b \in {}_RM$.

$$(1+1)(a\overline{+}b) = (1+1)(a\overline{+}b)$$

$$a\overline{+}b\overline{+}a\overline{+}b = (1+1)a\overline{+}(1+1)b$$

$$a\overline{+}b\overline{+}a\overline{+}b = a\overline{+}a\overline{+}b\overline{+}b$$

$$b\overline{+}a = a\overline{+}b$$

□

Ejemplo 1.0.8. (I) Sea K un campo. Entonces todo espacio vectorial sobre K es un K-módulo.

(II) Considremos el anillo $R = \begin{pmatrix} \mathbb{Q} & 0 \\ \mathbb{R} & \mathbb{R} \end{pmatrix}$ con las operaciones de matrices. Entonces

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbb{R} & \mathbb{R} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \mathbb{R} & 0 \\ \mathbb{R} & \mathbb{R} \end{pmatrix}$$

Son R-módulos izquierdos.

(III) Sea $R = C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ el anillo de funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, con producto la composición de funciones. Sea X un espacio topologico y sea $C(X, \mathbb{R})$ las funciones continuas de X en $\mathbb{R}$.

Sea $g \in C(X, \mathbb{R})$ y $f \in R$ entonces $f \circ g \in C(X, \mathbb{R})$. Con esta operación $C(X, \mathbb{R})$ es un R-módulo izquierdo.

(IV) Sean R y S anillos y sea $f : R \to S$ un morfismo de anillos. Con el morfismo f podemos darle estructura de R-módulo izquierdo a S de la siguiente manera:

Como S es un anillo, en particular es un grupo abeliano. Ahora si $r \in R$ y $s \in S$ definimos $r \cdot s = f(r)s$.

A esta estructura que le damos a S se le llama *restricción de escalares*.

Capítulo 2

Submódulos y Cocientes

2.1. Submódulos

Definición 2.1.1. $N \subseteq M$ es un *submódulo* de ${}_RM$ si N es un subgrupo de M y $\forall r \in R$ y $\forall x \in N$ $rx \in N$ y lo denotaremos $N \leq {}_RM$

Ejemplo 2.1.2. (I) Para todo R-módulo ${}_RM$, $\{\overline{0}\} \leq {}_RM$ y $M \leq {}_RM$.

(II) En ${}_RR$, $I \leq {}_RR$ si I es un ideal izquierdo de R

Definición 2.1.3. Un módulo M es *simple* si sus unicos submódulos son los triviales, es decir, 0 y M.

Ejemplo 2.1.4. (I) Si p es un número primo entonces los $\mathbb{Z}$-módulos $\mathbb{Z}_p$ son simples.

(II) Si $M_n(K)$ es el anillo de matrices cuadradas de $n \times n$ con coeficientes en un anillo con division (por ejemplo un campo) entonces para cada $1 \leq l \leq n$

$$S_l = \{(a_{ij}) \in M_n(K) \mid a_{ij} = 0 \text{ para todo } j \neq l\}$$

es simple como $M_n(K)$-módulo.

Definición 2.1.5. Si $A \subseteq R$ y $X \subseteq M$, $AX = \{a_1x_1 \mp a_2x_2 \mp ... \mp a_nx_n \mid a_i \in A \ x_i \in X \ n \in \mathbb{N}\}$ es el conjunto de *combinaciones lineales* de A y X.
Si $\phi \neq X \subseteq M$ y M es un R-módulo izquierdo entonces $RX \leq {}_RM$

Proposición 2.1.6. *Sea $\phi \neq N \subseteq {}_RM$. Son equivalentes:*

(a) $N \leq {}_RM$

(b) $RN = N$

(c) $\forall a, b \in R$ *y* $\forall x, y \in N$, $ax \mp by \in N$

Demostración. A partir de este momento denotaremos $\mp$ simplemente por $+$.
(a)$\Rightarrow$(b). Es claro que $N \subseteq RN$ ya que todo elemento de N es una combinación lineal en RN. Ahora sea $z \in RN$ entonces $z = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n$ con $a_i \in R$ y $x_i \in N$ como $N \leq {}_RM$ entonces $a_ix_i \in N$ y $a_ix_i + a_{i+1}x_{i+1} \in N$ por lo tanto $a_1x_1 + ... + a_nx_n \in N$ asi $RN \subseteq N$ demostrando *2*.

(b)⇒(c). Sean $a, b \in R$ y $x, y \in N$ entonces $ax + by \in RN$ y por *2*, tenemos que $RN = N$. Así que $ax + by \in N$.

(c)⇒(a). Tomemos $a = b = 1$ y $x, y \in N$. Entonces $x + y \in N$ por *3*. Ahora sea $b = 0$, $y = 0$ y $a \in R$ y $x \in N$, entonces $ax \in N$. Por lo tanto $N \leq {}_RM$. □

Observación 2.1.7. Si $\{N_\alpha\}_{\alpha\in X}$ es una familia de submódulos de ${}_RM$ entonces $\bigcap\{N_\alpha\}_{\alpha\in X}$ es un submodulo de ${}_RM$.

Demostración. Si $x, y \in \bigcap\{N_\alpha\}_{\alpha\in X}$ y $a, b \in R$ entonces $x, y \in N_\alpha$ $\forall\alpha \in X$ asi que $ax + by \in N_\alpha$ para todo $\alpha \in X$. Por lo tanto $ax + by \in \bigcap\{N_\alpha\}_{\alpha\in X}$. □

La proposición anterior nos dice que existe el menor (con respecto a la inclusión) submodulo de ${}_RM$ que contiene a X al cual se le llama el *generado por* X y se denota $\ell(X)$.

Definición 2.1.8. Una *retícula* $(L, \leq, \wedge, \vee)$ es un COPO (conjunto parcialmente ordenado) con orden $\leq$ donde cada pareja de elementos $x, y \in L$ tiene supremo denotado $x \vee y$ e ínfimo denotado $x \wedge y$. Decimos que una retícula es *completa* si todo subconjunto $X \subseteq L$ tiene supremo $\bigvee X$ e ínfimo $\bigwedge X$.

Ejemplo 2.1.9. (I) Sea X un conjunto y $\mathbf{P}(X)$ el conjunto potencia de X. Entonces $\mathbf{P}(X)$ es una retícula completa, donde el orden está dado por la contensión de conjuntos y el supremo e ínfimo son la union y la intesección de conjuntos respectivamente.

(II) Sea X un espacio topológico. Denotemos por $\mathcal{O}(X)$ al conjunto de subconjuntos abiertos de X. Entonces $\mathcal{O}(X)$ es una retícula completa donde el orden está dado por la contensión y el supremo e ínfimo quedan descritos por la union y tomar el interior de la intersección de una familia de conjuntos abiertos respectivamente.

Observación 2.1.10. Denotemos $Sub({}_RM) := \{N \mid N \leq {}_RM\}$. Entonces $Sub({}_RM)$ es una retícula completa donde $\leq$ esta dado por $\subseteq$. Además, dada una familia de submódulos de ${}_RM$, $\{N_\alpha\}_{\alpha\in X}$, el ínfimo de la familia está dado por $\bigwedge_{\alpha\in X} N_\alpha = \bigcap_{\alpha\in X} N_\alpha$ y el supremo por $\bigvee_{\alpha\in X} N_\alpha = \ell(\bigcup_{\alpha\in X} N_\alpha)$.

Demostración. Ejercicio. □

Lema 2.1.11. *Sea $\varphi : R \to S$ un morfismo de anillos suprayectivo y sea ${}_SM$ un S-modulo. Entonces M es un R-modulo y las reticulas de submodulos coinciden.*

Demostración. Sea ${}_SM$ un S-modulo. Sean $m \in M$ y $r \in R$, definimos $rm := \varphi(r)m$. Con esta operación M es un R-módulo.

Claramente si ${}_SN \leq {}_SM$, entonces ${}_RN \leq {}_RM$. Ahora si ${}_RL \leq {}_RM$, dado $s \in S$ y $l \in L$ entonces $sl = rl \in L$ donde $r \in R$ es tal que $\varphi(r) = s$. Esto da una biyeccion entre $Sub_R(M)$ y $Sub_S(M)$. □

Lema 2.1.12. *1. Si $X \subseteq Y \subseteq {}_RM$ entonces $\ell(X) \leq \ell(Y)$.*

2. $\ell(\phi) = \{0\}$

3. $\ell(X) = RX$

Demostración. *1* y *2* Son claras.

3. Como $RX \leq {}_RM$ y $X \subseteq RX$, $\ell(X) \subseteq RX$ por que $\ell(X)$ es el menor submódulo que contiene a X. Ahora si $a_1, ..., a_n \in R$ y $x_1, ..., x_n \in X$ entonces $a_1x_1 + ... + a_nx_n \in \ell(X)$ así que $RX \subseteq \ell(X)$. $\square$

Observación 2.1.13. Por el lemma anterior tenemos que

$$\ell\left(\bigcup_{\alpha\in X} M_\alpha\right) = \{x_1 + ... + x_n \mid x_i \in M_{\alpha_i}\}$$

el cual denotamos por $\sum_{\alpha\in X} M_\alpha$. Por lo tanto, $\bigvee_{\alpha\in X} M_\alpha = \sum_{\alpha\in X} M_\alpha$.

Lema 2.1.14. *Si H, K, L son submódulos de ${}_RM$ entonces*

$$H \cap (K + L) \geq (H \cap K) + (H \cap L)$$

Demostración. Tenemos que $H \cap K \leq H$ y $H \cap K \leq K \leq K + L$ también $H \cap L \leq H$ y $H \cap L \leq L \leq K + L$ entonces $H \cap K \leq H \cap (K + L)$ y $H \cap L \leq H \cap (K + L)$ por lo tanto $(H \cap K) + (H \cap L) \leq H \cap (K + L)$. $\square$

Observación 2.1.15. Notemos que la igualdad en la observación anterior no es cierta en general. Consideremos $\mathbb{R}^2$ como $\mathbb{R}$-módulo. Sean $H = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$, $K = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ y $L = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Es claro que H, K y L son submódulos de $\mathbb{R}^2$ y $H\cap(K+L) = H\cap\mathbb{R}^2 = H$. Por otro lado $(H\cap K)+(H\cap L) = \overline{0} + \overline{0} = \overline{0}$.

Lema 2.1.16 (Ley Modular)**.** *Sean H, L, K submódulos de ${}_RM$. Si $K \leq H \leq {}_RM$ entonces*

$$H \cap (K + L) = K + (H \cap L)$$

Demostración. $\supseteq]$ Es la Observación 2.1.14.

$\subseteq]$Sea $x \in H \cap (K + L)$ entonces $x \in H$ y $x = k + l$ con $k \in K$ y $l \in L$ entonces $l = x - k$ y como $k \in K \leq H$ y $x \in H \Rightarrow l \in H$ por lo tanto $x \in K + (H \cap L)$. Quedando demostrada la Ley Modular. $\square$

A partir de este momento denotaremos ${}_RM$ simplemente por M siempre y cuando esté claro sobre que anillo estamos trabajando.

Definición 2.1.17. Sea M un R-módulo.

1. Decimos que $X \subseteq M$ *genera* a M si $RX = M$.
2. Si X genera a M y X es finito, decimos que M es *finitamente generado*.
3. Si $X = \{x\}$ y genera a M, decimos que M es *cíclico* $M = Rx$.

Ejercicio 2.1.18. Probar que cualquier submodulo f.g. de ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ es cíclico.

Proposición 2.1.19. *Un módulo M es finitamente generado (f.g.) si y solo si para cada familia $\{M_i\}_{i\in I}$ de submódulos de M tales que $\sum_{i\in I} M_i = M$, existe $F \subseteq I$ finito tal que $M = \sum_{j\in F} M_j$.*

Demostración. Supongamos que M es f.g. entonces $M = RX$ para algún $X \subseteq M$ finito. Notemos que $RX = Rx_1 + Rx_2 + ... + Rx_n$. Si $M = \sum_{i \in I} M_i$ entonces para cada $i \in \{1, ..., n\}$, x_i está en una suma finita de submódulos en la familia $\{M_i\}_{i \in I}$. Entonces $X = \{x_1, ..., x_n\}$ está incluido en una suma finita de submódulos $\{M_j\}_{j \in F}$. Así se tiene que $M \subseteq \sum_{j \in F} M_j \subseteq \sum_{i \in I} M_i \subseteq M$. Recíprocamente tenemos que $M = \sum_{m \in M} Rm$ entonces existe $X = \{x_1, ..., x_n\} \subseteq M$ tal que $M = \sum_{i=1}^{n} Rx_i = RX$ por lo tanto M es f.g. $\square$

Definición 2.1.20. Decimos que $N \leq M$ es *máximo* en M si $N < M$ y siempre que $N < L \leq M$ se tiene que $L = M$.

Proposición 2.1.21. *Son equivalentes para* $N < M$*:*

(a) *N es máximo en M.*

(b) *Si $m \notin N$, entonces $N + Rm = M$*

Demostración. (a)⇒(b). Sup. que $m \notin N$ entonces $N < N + Rm$ y como N es máximo entonces $N + Rm = M$.

(b)⇒(a). Supongamos que $N < L \leq M$ como $N < L$ tomamos $m \in L - N$ entonces $N + Rm = M$ por hipótesis, pero $N + Rm \subseteq L$ entonces $L = M$. $\square$

Teorema 2.1.22. *Si ${}_RM$ es finitamente generado entonces todo submódulo propio de ${}_RM$ está incluido en un submódulo máximo.*

Demostración. Sea $K < M$ submódulo propio de M, entonces existe un conjunto $\{x_1, ..., x_n\}$ de M tal que $M = Rx_1 + ... + Rx_n + K$ y podemos suponer que n es el mínimo.

Sea $L = K + Rx_2 + ... + Rx_n$ y $L < M$. Sea $\mathbf{P} = \{N \leq {}_RM \mid N \neq M \ \wedge L \leq M\}$ que es no vacio ya que $L \in \mathbf{P}$. $(\mathbf{P}, \subseteq)$ es un COPO.
Notese que un submódulo de M, T, que incluya a L, no está en $\mathbf{P}$ si y solo si $x_1 \in T$.

Sea $C = \{N_\alpha\}_{\alpha \in X}$ una cadena en $\mathbf{P}$ no vacia, y sea $V = \bigcup C$.
Sean $a, b \in V$, $r, s \in R$ P.D. $ra + sb \in V$

Si $a, b \in V$ entonces $a \in N_i$ p. a. $i \in X$ y $b \in N_j$ p. a. $j \in X$ y como $N_i \subseteq N_j$ o $N_j \subseteq N_i$ por ser C una cadena entonces $a, b \in N_i$ o $a, b \in N_j$ así que $ra + sb \in N_i$ o $ra + sb \in N_j$ por lo tanto $ra + sb \in V$.

Como $x_1 \notin N_\alpha$ $\forall \alpha \in X$ entonces $x_1 \notin V$ asi que $V \in \mathbf{P}$, por el lema de Zorn $\mathbf{P}$ tiene elementos máximos.

Sea N máximo en $\mathbf{P}$, si $N < S \leq M$ entonces $x_1 \in S$ ya que de lo contrario S estaría en $\mathbf{P}$ contradiciendo la maximalidad de N, por lo tanto $S = M$. $\square$

Corolario 2.1.23. *${}_RR$ tiene máximos.*

Corolario 2.1.24. *Si M es f.g. entonces tiene máximos.*

Observación 2.1.25. Sea $X \subseteq {}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ X generador, es decir, $\mathbb{Z}X = {}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ y sea $x_0 \in X$
P.D. $\mathbb{Z}(X - \{x_0\}) = {}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$

Demostración. $\frac{x_0}{2} \in {}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ entonces $\frac{x_0}{2} = zx_0 + \sum_{x_i \neq x_0} z_i x_i \Rightarrow$
$x_0 = 2zx_0 + \sum_{x_i \neq x_0} 2z_i x_i \Rightarrow (1 - 2z)x_0 = \sum_{x_i \neq x_0} 2z_i x_i$
sea $n = 1 - 2z \Rightarrow nx_0 = \sum_{x_i \neq x_0} 2z_i x_i$ Ahora $\frac{x_0}{n} = z' x_0 + \sum_{x_j \neq x_0} z_j x_j \Rightarrow$
$x_0 = nz' x_0 + \sum_{x_j \neq x_0} nz_j x_j \Rightarrow x_0 = z' \sum_{x_i \neq x_0} 2z_i x_i + \sum_{x_j \neq x_0} nz_j x_j$
$= \sum_{x_k \neq x_0} z_k x_k$
por lo tanto $\mathbb{Z}(X - \{x_0\}) = {}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$. $\square$

Entonces todo generador de ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ es infinito y al quitarle un numero finito de elementos, sigue generando.

Observación 2.1.26. ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ no tiene submódulos maximos.

Demostración. Ejercicio □

Definición 2.1.27. Sea $\{N_\alpha\}_{\alpha\in X} \subseteq Sub(M)$ si:

1. $\sum_{\alpha\in X} N_\alpha = M$
2. $N_\alpha \cap \sum_{\beta\neq\alpha} N_j = 0$ para todo $\alpha \in X$

decimos que M es la *suma directa de la familia* $\{N_\alpha\}_{\alpha\in X}$ y lo denotamos como $\bigoplus_{\alpha\in X} \{N_\alpha\}$

Proposición 2.1.28. *Son equivalentes para* $M = \sum_{\alpha\in X} N_\alpha$

(a) $N_\alpha \cap \sum_{\beta\neq\alpha} N_j = 0$ *para todo* $\alpha \in X$*;*

(b) *todo elemento* $m \in M$ *se escribe de manera única como* $m = n_{\alpha_1} + ... + n_{\alpha_k}$ *con* $n_{\alpha_i} \in N_{\alpha_i}$.

Demostración. Supongamos el inciso 2. Sea $m \in M$ tal que $m = a_{\alpha_1} + ... + a_{\alpha_k}$ y $m = b_{\alpha_1} + ... + b_{\alpha_s}$ con $a_{\alpha_i}, b_{\alpha_i} \in N_{\alpha_i}$ dos representaciones distintas de m. Tomemos $a_{\alpha_j} \in N_{\alpha_j}$. Entonces $a_{\alpha_j} = b_{\alpha_1} + ... + b_{\alpha_s} - a_{\alpha_1} - ... - a_{\alpha_k}$ con $k \neq j$. Agrupando términos que estén en el mismo submódulo, nos da que $a_{\alpha_j} \in N_{\alpha_j} \cap \sum_{\beta\neq\alpha_j} N_\beta$, contradiciendo *2*. Por lo tanto m se escribe de manera única. Recíprocamente si $N_\alpha \cap \sum_{\beta\neq\alpha} N_\beta \neq 0$ tomemos un elemento n_α en la intersección. Así, $n_\alpha = n_{\beta_1} + ... + n_{\beta_k}$ con $n_{\beta_j} \in N_{\beta_j}$ y $\beta_j \neq \alpha$. Pero esto contradice que todo elemento de M se escriba de manera única. Por lo tanto, $n_\alpha = 0$. □

Definición 2.1.29. Sea M un módulo. Decimos que M *satisface la condición de cadena ascendente (c.c.a)* (resp. *satisface la condicion de cadena descendente (c.c.d)*) si toda cadena $N_1 \leq N_2 \leq \cdots$ (resp. $N_1 \geq N_2 \geq \cdots$) de submódulos de M se estaciona.

Lema 2.1.30. *Si un R-módulo satisface c.c.d. en submódulos cíclicos, entonces satisface la c.c.d. en submódulos f.g.*

Demostración. Primero veamos que para cualquier módulo M, la familia $\Gamma = \{N \leq M \mid N \text{ satisface la c.c.d. para f.g}\}$ tiene elementos máximos. Sea $\mathcal{C} = \{N_i\}_I$ una cadena de elementos en Γ, y consideremos $\bigcup\mathcal{C}$. Sea $L_1 \geq L_2 \geq L_3 \geq \cdots$ una cadena descendente de submódulos finitamente generados de $\bigcup\mathcal{C}$. Supongamos que L_1 está generado por $l_1, l_2, ..., l_n$. Entonces, para cada $1 \leq i \leq n$, $l_i \in N_{ji}$ para algún $ji \in I$. Como $\mathcal{C}$ es una cadena podemos tomar el mayor entre $\{N_{j1}, ..., N_{jn}\}$, digamos N. Así, $l_1, ..., l_n \in N$ y por lo tanto $L_1 \leq N$. Como $N \in \Gamma$, entonces la cadena $L_1 \geq L_2 \geq L_3 \geq \cdots$ se estaciona. Por lo tanto $\bigcup\mathcal{C} \in \Gamma$. Por el Lemma de Zorn, Γ tiene elementos máximos.

Supongamos que M es un módulo que satisface la c.c.d. para submódulos cíclicos y sea A un submódulo máximo en Γ. Si $A = M$, tenemos el resultado. Supongamos que $A \neq M$. Entonces el conjunto $\Delta = \{Rm \leq M \mid Rm \nsubseteq A\} \neq \emptyset$. Por hipótesis, Δ tiene elementos mínimos. Sea Rm_0 un elemento mínimo en Δ. Pongamos $U_0 = A + Rm_0$. Afirmamos que U_0 está en Γ. Sea $U_0 \geq U_1 \geq U_2 \geq \cdots$

una cadena descendente de submódulos f.g. Si U_i está contenido en A para algún i, terminamos. Si U_i no está contenido en A para cada i, existe un cíclico $Rm_i \leq U_i$ mínimo con la propiedad de que $Rm_i \nsubseteq A$. Tenemos que $U_0 = A + Rm_0$. Supongamos que tenemos que $U_n = A_n + Rm_n$ con $A \geq \cdots \geq A_{n-1} \geq A_n$ para $n > 0$. Como $m_{n+1} \in U_{n+1} \leq U_n$, tenemos que $A_n + Rm_{n+1} \subseteq A_n + Rm_n = U_n$. Como $m_{n+1} \in U_n$, existen $a \in A_n$ y $r \in R$ tales que $m_{n+1} = a + rm_n$. Como $m_{n+1} \neq A$, $rm_n \neq A$. Por la minimalidad de Rm_n, se tiene que $Rrm_n = Rm_n$. Esto implica que existe $t \in R$ tal que $trm_n = m_n$. Entonces, $tm_{n+1} = ta + trm_n = ta + m_n$. Por lo tanto $m_n \in A_n + Rm_{n+1}$ y así $A_n + Rm_{n+1} = A_n + Rm_n = U_n$. Sean $x_1, ..., x_\ell$ generadores de U_{n+1}. Por lo anterior, podemos escribir $x_j = a_j + r_j m_{n+1}$ con $a_j \in A_n$ y $r_j \in R$ para $1 \leq j \leq \ell$. Definamos $A_{n+1} = Ra_1 + \cdots Ra_\ell$. Entonces $U_{n+1} = A_{n+1} + Rm_{n+1}$ y $A_n \geq A_{n+1}$. Por inducción tenemos una cadena descendente $A \geq A_1 \geq A_2 \geq \cdots$ de submódulos f.g. de A. Por la propiedad de A, esta cadena se estaciona, digamos $A_n = A_{n+k}$ para todo $k > 0$. Por lo tanto, $U_n = A_n + Rm_n = A_n + Rm_{n+1} = A_{n+1} + Rm_{n+1} = U_{n+1}$. Lo que implica que la cadena $U_0 \geq U_1 \geq U_2 \geq \cdots$ se estaciona y entonces U_0 está en Γ. Esto es una contradicción y por lo tanto $A = M$. □

2.2. Cocientes

Sea $_RM$ un R-módulo y $N \leq M$ definimos la siguiente relación de equivalencia en M: Sean $x, y \in M$. Decimos que x y y son congruentes módulo N ($x \equiv y(N)$), si y solo si $x - y \in N$.

Observación 2.2.1. $\equiv\ (N)$ es de equivalencia.

Demostración. Ejercicio. □

Para $x \in M$ consideremos su clase de equivaliencia $\overline{x}$. Entonces

$$\overline{x} = \{y \in M \mid x \equiv y\,(N)\} = \{y \in M \mid y = x + n \ p.a. \ n \in N\} = \{x + n \mid n \in N\}.$$

Así que denotamos a la clase de equivalencia de x por $x + N$ y denotamos al *cociente* de esta relación por $M/N := \{x + N \mid x \in M\}$.

Podemos definir en M/N las siguientes operaciones: Sean $y + N, x + N \in M/N$ y $r \in R$

$$(x + N)\overline{+}(y + N) := (x + y) + N$$

$$r(x + N) := rx + N$$

Observación 2.2.2. Con las operaciones anteriores M/N es un R-módulo.

Demostración. Ejercicio □

Proposición 2.2.3. *Sean M un R-módulo y $N \leq M$. Entonces existe una biyección entre los submódulos de M que contienen a N y los submódulos de M/N.*

Demostración. Sea $Sub(M)/N := \{L \leq M \mid N \subseteq L\}$. Definimos:

$$f_N : \quad Sub(M)/N \longrightarrow Sub(M/N)$$

$$H \longrightarrow H/N = \{h + N \mid h \in H\}$$

$$f_N^* : \quad Sub(M/N) \longrightarrow Sub(M)/N$$

$$T \longrightarrow \{x \in M \mid x + N \in T\} = f_N^*(T)$$

Si $x, y \in f_N^*(T)$ entonces $x + N, y + N \in T \Rightarrow (x + N) + (y + N) \in T \Rightarrow (x + y) + N \in T$ por lo tanto $x + y \in f_N^*(T)$ y si $r \in R$ entonces $rx + N = r(x + N) \in T$ por lo tanto $rx \in f_N^*(T)$
Por lo tanto $f_N^*(T) \in Sub(M)/N$.

Afirmamos que f_N^* es biyectiva.
Veamos que $f_N \circ f_N^* = Id_{Sub(M/N)}$ y $f_N^* \circ f_N = Id_{Sub(M)/N}$.
Sea $T \in Sub(M/N)$ entonces $f_N \circ f_N^*(T) = f_N(\{x \in M \mid x + N \in T\}) = \{x \in M \mid x + N \in T\}/N = T$.
Ahora sea $H \in Sub(M)/N$ entonces $f_N^* \circ f_N(H) = f_N^*(H/N) = \{x \in M \mid x + N \in H/N\} = H$. $\square$

Corolario 2.2.4. *Sen $N \leq M$. Entonces M/N es simple si y solo si N es máximo en M.*

Como $_RR$ es f.g. entonces tiene máximos y por lo tanto siempre hay módulos simples.

Proposición 2.2.5. *Sea M un módulo finitamente generado y $N \leq M$. Entonces M/N es finitamente generado.*

Demostración. Supongamos que M es finitamente generado, con generadores $m_1, ..., m_n \in M$. Sea $x+N \in M/N$. Se tiene que $x = r_1m_1 + r_2m_2 + \cdots + r_nm_n$. Entonces, $x + N = (r_1m_1 + r_2m_2 + \cdots + r_nm_n) + N = r_1m_1 + N + r_2m_2 + N + \cdots + r_nm_n + N$. Lo que implica que $m_1 + N, m_2 + N, ..., m_n + N$ generan a M/N. $\square$

Observación 2.2.6. En general, submodulos de módulos finitamente generados no tienen por qué heredar la propiedad. Para ésto, consideremos el anillo

$$R = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix}$$

con las operaciones usuales de matrices. Es claro que $_RR$ es finitamente generado. Pero el ideal izquierdo

$$I = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Q} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

no lo es. Notemos que la acción de R en I está dada por $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & q \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & aq \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Es decir, está determinada por la acción de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Q}$. Sabemos que $_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ no es finitamente generado (Observación 2.1.25), por lo tanto $_RI$ tampoco.

Capítulo 3

R-morfismos

3.1. R-morfismos

Definición 3.1.1. Si ${}_RM$ y ${}_RN$ son R-módulos una función $\varphi : M \to N$ es un *R-morfismo* si:

1. $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$
2. $\varphi(rx) = r\varphi(x)$

para todo $x, y \in M$ y todo $r \in R$.

Observación 3.1.2. φ es un R-morfismo de ${}_RM$ a ${}_RN$ si y solo si $\varphi(rx+y) = r\varphi(x) + \varphi(y)$ $\forall x, y \in M$ y $\forall r \in R$.

Ejemplo 3.1.3. (I) Para cualesquiera dos módulos M y N tenemos el *morfismo cero*:

$$\begin{aligned} \overline{0} : \quad & M \longrightarrow N \\ & m \longmapsto 0 \qquad \forall m \in M \end{aligned}$$

(II) Sea ${}_RN \leq {}_RM$ y consideremos la función:

$$\begin{aligned} i : \quad & N \longrightarrow M \\ & n \longmapsto n \qquad \forall n \in N \end{aligned}$$

Si $N = M$, entonces i es la identidad denotada Id_M. Si N es propio en M a i se le llama la *inclusión canónica* y se denotará con la flecha $\hookrightarrow$.

(III) Si $N \leq {}_RM$, la función

$$\begin{aligned} \pi : \quad & M \longrightarrow M/N \\ & m \longmapsto m + N \end{aligned}$$

es R-morfismo al cual llamamos la *proyección canónica*. Para ver ésto, sean $x, y \in M$ y $r \in R$

$$\pi (rx + y) = (rx + y) + N = (rx + N) + (y + N)$$

$$= r (x + N) + (y + N) = r\pi (x) + \pi (y)$$

.

Lema 3.1.4. *1. Composición de R-morfismos es un R-morfismo.*

2. Si $\varphi : M \to N$ es un R-morfismo biyectivo entonces la función inversa de φ es un R-morfismo dado por $\varphi^{-1} (x) = u$ si $\varphi (u) = x$.

Demostración. 1. Sean M, N, L R-módulos, $\varphi : M \to N$ y $\psi : N \to L$ R-morfismos $x, y \in M$ y $r \in R$ entonces

$$\psi\varphi (rx + y) = \psi (r\varphi (x) + \varphi (y)) = r\psi\varphi (x) + \psi\varphi (y)$$

2. Supongamos que φ es biyectiva con inversa φ^{-1}. Entonces

$$\varphi^{-1}(rn + l) = \varphi^{-1}(r\varphi(x) + \varphi(y)) = \varphi^{-1}(\varphi(rx + y)) = rx + y$$

$$= r\varphi^{-1}(n) + \varphi^{-1}(l)$$

□

Observación 3.1.5. Sea $\varphi : M \to N$ un R-morfismo. Usaremos el termino *monomorfismo* para referirnos a que φ es inyectivo y usaremos el termimo *epimorfismo* si φ es suprayectivo. Los terminos monomorfismo (resp. epimorfismo) y morfismo inyectivo (resp. suprayectivo) no son sinónimos, sin embargo más adelante en el capítulo 4 daremos la justificación de éste uso indistinguido.

Definición 3.1.6. Sea $\varphi : M \to N$ un R-morfismo. Si φ es biyectivo, es decir, inyectivo y suprayectivo lo llamamos *isomorfismo*. Decimos que M es isomorfo a N y lo denotamos $M \cong N$ si existe un isomorfismo $\varphi : M \to N$.

Ejemplo 3.1.7. Consideremos $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}$-módulo y sea $0 \neq n \in \mathbb{Z}$. Entonces $\mathbb{Z} \cong n\mathbb{Z}$ donde el isomorfismo está dado por $x \mapsto nx$.

Lema 3.1.8. *Sean M, N y L R-ódulos. Entonces*

1. *$M \cong M$.*

2. *si $M \cong N$ entonces $N \cong M$.*

3. *si $M \cong N$ y $N \cong L$ entonces $M \cong L$.*

Demostración. Ejercicio. □

Lema 3.1.9. *Sea $\varphi : M \to N$ R-morfismo, $U \leq M$ y $V \leq N$ entonces:*

1. *$\varphi (U) \leq N$.*

2. *$\varphi^{-1} (V) \leq M$*

Demostración. 1. Sean $x, y \in U$ y $r \in R$ entonces $x = \varphi(u_1)$ y $y = \varphi(u_2)$ con $u_1, u_2 \in U$ asi $rx + y = r\varphi(u_1) + \varphi(u_2) = \varphi(ru_1 + u_2) \in \varphi(U)$ por lo tanto $\varphi(U) \leq N$.
2. Sean $x, y \in \varphi^{-1}(V)$ y $r \in R$ entonces $\varphi(x) \in V$ y $\varphi(y) \in V$ así que $\varphi(rx + y) = r\varphi(x) + \varphi(y) \in V$ por lo tanto $rx + y \in \varphi^{-1}(V)$. $\square$

Definición 3.1.10. Sea $\varphi : M \to N$ es un R-morfismo.

1. El *núcleo* de φ se define como:
$$\operatorname{Ker}\varphi = \varphi^{-1}(\{0\}) \leq M.$$
2. La *imagen* de φ se define como:
$$\operatorname{Im}\varphi = \varphi(M) = \{n \in N \mid n = \varphi(m) \text{ para algún } m \in M\}.$$
3. El *conúcleo* de φ se define como:
$$\operatorname{Coker}\varphi = N/\operatorname{Im}\varphi.$$

Lema 3.1.11. *Sea $\varphi : M \to N$ un R-morfismo.*

1. *Si $U \leq M$, entonces $\varphi^{-1}(\varphi(U)) = U + \operatorname{Ker}\varphi$.*
2. *Si $V \leq N$, entonces $\varphi\left(\varphi^{-1}(V)\right) = V \cap \operatorname{Im}\varphi$.*
3. *Si $\psi : N \to L$ es un R-morfismo, entonces:*
   a) $\operatorname{Ker}\psi\varphi = \varphi^{-1}(\operatorname{Ker}\psi)$.
   b) $\operatorname{Im}\psi\varphi = \psi(\operatorname{Im}\varphi)$.

Demostración. 1. Sea $x \in \varphi^{-1}(\varphi(U))$, es decir, $\varphi(x) \in \varphi(U)$. Entonces existe $u \in U$ tal que $\varphi(u) = \varphi(x)$ y así $u - x \in \operatorname{Ker}\varphi$. Por lo tanto $x = x + (u - x) \in U + \operatorname{Ker}\varphi$. Recíprocamente, si $x \in U + \operatorname{Ker}\varphi$, entonces $x = u + k$ con $u \in U$ y $k \in \operatorname{Ker}\varphi$. Así $\varphi(x) = \varphi(u + k) = \varphi(u) + \varphi(k) = \varphi(u) + 0 = \varphi(u)$ lo que implica que $\varphi(x) \in \varphi(U)$. Por lo tanto $x \in \varphi^{-1}(\varphi(U))$.

2. Si $y \in \varphi\left(\varphi^{-1}(V)\right)$ entonces $y = \varphi(x)$ para algún $x \in \varphi^{-1}(V)$, lo que implica que $y = \varphi(x) \in V$. Por lo tanto $y \in \operatorname{Im}\varphi$ y $y \in V$, es decir, $y \in V \cap \operatorname{Im}\varphi$. Recíprocamente, si $y \in V \cap \operatorname{Im}\varphi$ entonces $y \in V$ y $y = \varphi(x)$ para algún $x \in M$. Entonces $x \in \varphi^{-1}(V)$ y por lo tanto $y \in \varphi\left(\varphi^{-1}(V)\right)$.

3a) $x \in \operatorname{Ker}\psi\varphi \Leftrightarrow \psi\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) \in \operatorname{Ker}\psi \Leftrightarrow x \in \varphi^{-1}(\operatorname{Ker}\psi)$.

3b) $x \in \operatorname{Im}\psi\varphi \Leftrightarrow x = \psi\varphi(y)$ p. a. $y \in M \Leftrightarrow x \in \psi(\varphi(y)) \Leftrightarrow x \in \psi(\operatorname{Im}\varphi)$. $\square$

Proposición 3.1.12. *Son equivalentes para un R-morfismo $\varphi : M \to N$:*

(a) *φ es inyectiva.*

(b) $\operatorname{Ker}\varphi = 0$

Demostración. (a)$\Rightarrow$(b). Sea $x \in \operatorname{Ker}\varphi$ entonces $\varphi(x) = 0$ pero también $\varphi(0) = 0$ por ser φ R-morfismo y como φ es inyectiva entonces $x = 0$.
(b)$\Rightarrow$(a). Si $\varphi(x) = \varphi(y)$ se tiene que $\varphi(x - y) = 0$ entonces $x - y \in \operatorname{Ker}\varphi$ por lo tanto $x = y$ y φ es inyectiva. $\square$

Proposición 3.1.13. *Son equivalentes para un R-morfismo $\varphi : M \to N$:*

(a) *φ es suprayectiva.*

(b) $\operatorname{Coker}(\varphi) = 0$

Demostración. Solo hay que notar que φ es sobre si y sólo si $\operatorname{Im}\varphi = N$ si y sólo si $N/\operatorname{Im}\varphi = 0$. □

Corolario 3.1.14. *Sean A,B,C, y D R-módulos. Si el cuadrado*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\gamma"] & B \arrow[d, "\beta"] \\ C \arrow[r, "\delta"] & D \end{tikzcd}$$

es conmutativo con γ sobre y β inyectivo, entonces:

1. $\operatorname{Im}\alpha = \beta^{-1}(\operatorname{Im}\delta)$

2. $\operatorname{Ker}\delta = \gamma(\operatorname{Ker}\alpha)$

Demostración. 1. Por el Lema 3.1.11, $\operatorname{Im}\delta\gamma = \delta(\operatorname{Im}\gamma) = \delta(C) = \operatorname{Im}\delta$ pero también tenemos que $\operatorname{Im}\delta\gamma = \operatorname{Im}\beta\alpha = \beta(\operatorname{Im}\alpha)$ por lo tanto $\operatorname{Im}\delta = \beta(\operatorname{Im}\alpha)$ entonces $\beta^{-1}(\operatorname{Im}\delta) = \beta^{-1}\beta(\operatorname{Im}\alpha) = \operatorname{Im}\alpha$

2. Usando el Lema 3.1.11, $\operatorname{Ker}\beta\alpha = \alpha^{-1}(\operatorname{Ker}\beta) = \alpha^{-1}(0) = \operatorname{Ker}\alpha$ pero $\operatorname{Ker}\beta\alpha = \operatorname{Ker}\delta\gamma = \gamma^{-1}(\operatorname{Ker}\delta)$ así que $\operatorname{Ker}\alpha = \gamma^{-1}(\operatorname{Ker}\delta)$ entonces $\gamma(\operatorname{Ker}\alpha) = \gamma\gamma^{-1}(\operatorname{Ker}\delta) = \operatorname{Ker}\delta$. □

Proposición 3.1.15. *Si $\varphi : A \to B$ es un R-morfismo, $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia de submódulos de A y $\{B_j\}_{j\in J}$ es una familia de submódulos de B, entonces:*

1. $\varphi\left(\sum_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I}\varphi(A_i)$.

2. $\varphi^{-1}\left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{j\in J}\varphi^{-1}(B_j)$.

3. $\sum_{j\in J}\varphi(B_j) \subseteq \varphi^{-1}\left(\sum_{j\in J} B_j\right)$. *Si $B_j \subseteq \operatorname{Im}\varphi$ para todo $j \in J$, entonces se da la igualdad.*

4. $\varphi\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in I}\varphi(A_i)$. *Si $\operatorname{Ker}\varphi \subseteq A_i$ para todo $i \in I$, entonces se da la igualdad.*

Demostración. 1. $x \in \varphi\left(\sum_{i\in I} A_i\right) \Leftrightarrow x = \varphi(x_{i1} + ... + x_{in})$ con $x_{ij} \in A_{ij} \Leftrightarrow x = \varphi(x_{i1}) + ... + \varphi(x_{in}) \Leftrightarrow x \in \sum_{i\in I}\varphi(A_i)$.

2. $x \in \varphi^{-1}\left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) \Leftrightarrow \varphi(x) \in \bigcap_{j\in J} B_j \Leftrightarrow \varphi(x) \in B_j$ para todo $j \in J \Leftrightarrow x \in \varphi^{-1}(B_j)$ para todo $j \in J \Leftrightarrow x \in \bigcap_{j\in J}\varphi^{-1}(B_j)$.

3. $x \in \sum_{j\in J}\varphi^{-1}(B_j) \Leftrightarrow x = x_{j1} + ... + x_{jn}$ con $x_{jk} \in \varphi^{-1}(B_{jk})$ entonces $\varphi(x) = \varphi(x_{j1}) + ... + \varphi(x_{jn})$ con $\varphi(x_{jk}) \in B_{jk}$ así que $\varphi(x) \in \sum_{j\in J} B_j$ lo que implica que $x \in \varphi^{-1}(\sum_{j\in J} B_j)$. Ahora, si suponemos que $B_j \subseteq \operatorname{Im}\varphi$ para toda $j \in J$ tenemos que

$$\varphi^{-1}\left(\sum_{j\in J} B_j\right) = \varphi^{-1}\left(\sum_{j\in J}(B_j \cap \operatorname{Im}\varphi)\right) = \varphi^{-1}\left(\sum_{j\in J}\varphi\left(\varphi^{-1}\left(B_j\right)\right)\right)$$

$$= \varphi^{-1}\left(\varphi\left(\sum_{j\in J}\varphi^{-1}\left(B_j\right)\right)\right) = \sum_{j\in J}\varphi^{-1}\left(B_j\right) + \operatorname{Ker}\varphi = \sum_{j\in J}\varphi^{-1}\left(B_j\right).$$

4. $x \in \varphi(\bigcap_{i\in I} A_i) \Leftrightarrow x = \varphi(y)$ con $y \in \bigcap_{i\in I} A_i$ entonces $x \in \varphi(A_i)$ para toda $i \in I$, por lo tanto $x \in \bigcap_{i\in I}\varphi(A_i)$. Ahora, si suponemos que $\operatorname{Ker}\varphi \subseteq A_i$ para toda $i \in I$ tenemos que

$$\varphi\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \varphi\left(\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) + \operatorname{Ker}\varphi\right) = \varphi\left(\bigcap_{i\in I}\varphi^{-1}(\varphi(A_i))\right)$$

$$= \varphi\left(\varphi^{-1}\left(\bigcap_{i\in I}\varphi(A_i)\right)\right) = \bigcap_{i\in I}\varphi(A_i) \cap \operatorname{Im}\varphi = \bigcap_{i\in I}\varphi(A_i).$$

□

3.2. Teoremas de Isomorfismo

Teorema 3.2.1. *Todo R-morfismo $\varphi : M \to N$ se puede factorizar como $\varphi = \varphi_1\varphi_2$ donde φ_1 es monomorfismo y φ_2 es epimorfismo.*

Demostración. Tomemos el módulo $M/\operatorname{Ker}\varphi$ y $\varphi_2 = \pi : M \to M/\operatorname{Ker}\varphi$ la proyección canónica. Definimos $\varphi_1 : M/\operatorname{Ker}\varphi \to N$ como $\varphi_1(m + \operatorname{Ker}\varphi) = \varphi(m)$. Notemos que

$$m + \operatorname{Ker}\varphi = m' + \operatorname{Ker}\varphi \Leftrightarrow m - m' \in \operatorname{Ker}\varphi \Leftrightarrow \varphi(m - m') = 0$$

$$\Leftrightarrow \varphi(m) - \varphi(m') = 0 \Leftrightarrow \varphi(m) = \varphi(m').$$

Por lo tanto φ_1 está bien definida y es inyectiva. Además, φ_1 es R-morfismo ya que $\varphi_1(r(m + \operatorname{Ker}\varphi) + (n + \operatorname{Ker}\varphi)) = \varphi_1((rm + n) + \operatorname{Ker}\varphi) = \varphi(rm + n) = r\varphi(m) + \varphi(n) = r\varphi_1(m + \operatorname{Ker}\varphi) + \varphi_1(n + \operatorname{Ker}\varphi)$. Más aún, como $\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Im}\varphi_1$ se tiene que φ es epi si y solo si φ_1 es un isomorfismo. □

Teorema 3.2.2 (1er Teorema de Isomorfismo)**.** *Si $\varphi : M \to N$ es un R-morfismo entonces $M/\operatorname{Ker}\varphi \cong \operatorname{Im}\varphi$.*

Demostración. Por el Teorema 3.2.1. □

Teorema 3.2.3 (2do Teorema de Isomorfismo)**.** *Sean $H, K \leq M$. Entonces $(H + K)/K \cong H/(H \cap K)$.*

Demostración. Tomemos $f : H \to (H + K)/K$ definida como $f(h) = h + K$. Entonces $\operatorname{Ker} f = \{h \in H \mid h + K = K\} = H \cap K$. Por 1er Teorema de isomorfismo (Teorema 3.2.2) $(H + K)/K \cong H/(H \cap K)$. □

Teorema 3.2.4 (3er Teorema de Isomorfismo)**.** *Sean $K \leq L \leq M$. Entonces $M/L \cong (M/K)/(L/K)$.*

Demostración. Tomemos $f : M/K \to M/L$ definida como $f(m+K) = m+L$. Notemos que

$$m + K = m' + K \Leftrightarrow m - m' \in K \Rightarrow m - m' \in L \Leftrightarrow m + L = m' + L.$$

Por lo tanto f está bien definida y es sobre. Además $m + K \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow f(m + K) = L \Leftrightarrow m + L = L \Leftrightarrow m \in L$ así que $\operatorname{Ker} f = \{m + K \mid m \in L\} = L/K$. Por el 1er Teorema de isomorfismo (Teorema 3.2.2) $M/L = (M/K)/(L/K)$. □

Corolario 3.2.5. *1. Si $M = N \oplus L$ entonces $M/N \cong L$.*

2. M es cíclico $\Leftrightarrow$ M es cociente de R.

Demostración. 1. $M/N \cong (N \oplus L)/N \cong L/(N \cap L) \cong L/0 \cong L$.

2 $\Rightarrow$. Supongamos que $M = Rx$ para algún $x \in M$. Consideremos el R-morfismo $(\_ \cdot x) : R \to Rx$ multiplicar por x por la izquierda. Por el 1er Teorema de isomorfismo (Teorema 3.2.2) $M = Rx \cong R/\operatorname{Ker}(\_ \cdot x)$.

3 $\Leftarrow$. Si $M \cong R/I$ para algún ideal izquierdo I de R, entonces $R(1+I) = R/I$. Por lo tanto M es cíclico. □

Definición 3.2.6. Dado un módulo M is $x \in M$, *el anulador de x* se define como $\operatorname{Ker}(\_ \cdot x) = \{r \in R \mid rx = 0\}$ y lo denotaremos $(0 : x)$.

Lema 3.2.7 (Zassenhaus)**.** *Sea M un R-módulo y $U, U', V, V' \leq M$ tales que $U' \leq U \leq M$ y $V' \leq V \leq M$ entonces $\frac{U'+(U\cap V)}{U'+(U\cap V')} \cong \frac{V'+(U\cap V)}{V'+(U'\cap V)}$.*

Demostración. Tenemos que $U \cap V' \leq U \cap V$. Entonces

$$\frac{U' + (U \cap V)}{U' + (U \cap V')} = \frac{(U \cap V) + (U' + (U \cap V'))}{U' + (U \cap V')} \cong \frac{U \cap V}{(U \cap V) \cap (U' + (U \cap V'))},$$

por el 2do Teorema de isomorfismo. Pero por la ley modular 2.1.16,

$$(U \cap V) \cap U' + (U \cap V') = U \cap V \cap U' + U \cap V' = V \cap U' + U \cap V'.$$

Por lo tanto $\frac{U\cap V}{(U\cap V)\cap(U'+(U\cap V'))} = \frac{U\cap V}{V\cap U'+U\cap V'}$. Análogamente se tiene que

$$\frac{V' + (U \cap V)}{V' + (U' \cap V)} \cong \frac{U \cap V}{V' \cap U + U' \cap V}.$$

□

Proposición 3.2.8. *Sea $\varphi : M \to N$ un R-morfismo.*

1. *Sea $\alpha : M \to M'$ un epimorfismo tal que $\operatorname{Ker} \alpha \subseteq \operatorname{Ker} \varphi$. Entonces existe un único R-morfismo $\beta : M' \to N$ tal que $\varphi = \beta\alpha$.*

2. *Sea $\gamma : N' \to N$ un monomorfismo tal que $\operatorname{Im} \varphi \subseteq \operatorname{Im} \gamma$. Entonces existe un único $\delta : M \to N'$ tal que $\varphi = \gamma\delta$*

Demostración. *1.* Definimos $\beta : M' \to N$ como $\beta(y) = \varphi(x)$ si $\alpha(x) = y$.Notemos que si $\alpha(x) = \alpha(x')$, entonces $x - x' \in \operatorname{Ker}\alpha \subseteq \operatorname{Ker}\varphi$. Así que $\varphi(x) = \varphi(x')$. Por lo tanto β esta bien definida. Ahora, veamos que β es un R-morfismo. Sean $y_1, y_2 \in M'$ tales que $\alpha(x_1) = y_1$ y $\alpha(x_2) = y_2$ y sea $r \in R$. Entonces $r\beta(y_1) + \beta(y_2) = r\varphi(x_1) + \varphi(x_2) = \varphi(rx_1 + x_2)$. Como $\alpha(rx_1 + x_2) = ry_1 + y_2$, $\beta(ry_1 + y_2) = \varphi(rx_1 + x_2) = r\beta(y_1) + \beta(y_2)$. Por la forma de definir β, ésta es única y $\varphi = \beta\alpha$. Además β es mono si y solo si $\operatorname{Ker}\alpha = \operatorname{Ker}\varphi$, y β es epi si y solo si φ es epi.

2. Definimos $\delta : M \to N'$ como $\delta(x) = y$ donde $\gamma(y) = \varphi(x)$ Notemos que si $\varphi(x) = \gamma(y')$ entonces $\gamma(y) = \gamma(y') \Leftrightarrow y - y' \in \operatorname{Ker}\gamma = \{0\}$ entonces $y = y'$. Por lo tanto δ esta bien definida y es única. Claramente, $\gamma\delta = \varphi$. Además δ es mono si y solo si φ es mono, y δ es epi si y solo si $\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Im}\gamma$. □

Definición 3.2.9.
1. $N \leq M$ se llama *sumando directo* de M, si existe $L \leq M$ tal que $N \oplus L = M$
2. Decimos que un monomorfismo $\alpha : M \to N$ se *escinde* si $\operatorname{Im}\alpha$ es un sumando directo de N.
3. Decimos que un epimorfismo $\beta : M \to N$ se *escinde* si $\operatorname{Ker}\beta$ es un sumando directo de M.

Lema 3.2.10. *Si el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\lambda"'] & N \arrow[d, "\beta"] \\ & M \end{tikzcd}$$

es conmutativo, entonces:

1. $\operatorname{Im}\alpha + \operatorname{Ker}\beta = \beta^{-1}(\operatorname{Im}\lambda)$.

2. $\operatorname{Im}\alpha \cap \operatorname{Ker}\beta = \alpha(\operatorname{Ker}\lambda)$.

Demostración. *1.* $\operatorname{Im}\lambda = \operatorname{Im}\beta\alpha = \beta(\operatorname{Im}\alpha)$, entonces $\beta^{-1}(\operatorname{Im}\lambda)$
$= \beta^{-1}(\beta(\operatorname{Im}\alpha)) = \operatorname{Im}\alpha + \operatorname{Ker}\beta$.

2. $\operatorname{Ker}\lambda = \operatorname{Ker}\beta\alpha = \alpha^{-1}(\operatorname{Ker}\beta)$, entonces $\alpha(\operatorname{Ker}\lambda)$
$= \alpha(\alpha^{-1}(\operatorname{Ker}\beta)) = \operatorname{Ker}\beta \cap \operatorname{Im}\alpha$. □

Corolario 3.2.11. *Con el diagrama del lema anterior.*

1. Si λ es un epimorfismo, entonces $\operatorname{Im}\alpha + \operatorname{Ker}\beta = N$.

2. Si λ es un monomorfismo, entonces $\operatorname{Im}\alpha \cap \operatorname{Ker}\beta = \{0\}$.

3. Si λ es un isomorfismo, entonces $\operatorname{Im}\alpha \oplus \operatorname{Ker}\beta = N$.

Corolario 3.2.12. *Son equivalentes para $\alpha : M \to N$:*

(a) *α es mono y se escinde.*

(b) *Existe $\beta : N \to M$ tal que $\beta\alpha = Id_M$*

Demostración. (a)⇒(b). Supongamos que α es un monomorfismo y que $\operatorname{Im}\alpha \oplus N' = N$ para $N' \leq N$. Sea $\alpha_0 : M \to \operatorname{Im}\alpha$ la corresticción de α a su imagen. Como α es mono, α_0 es un isomorfismo. Sea $\rho : N \to \operatorname{Im}\alpha$ la proyección canónica y sea $\beta = \alpha_0\rho$. Entonces, para todo $m \in M$ se tiene que

$$\beta\alpha(m) = \alpha_0\rho\alpha(m) = \alpha_0\rho(\alpha(m)) = \alpha_0(\alpha(m)) = m.$$

Por lo tanto $\beta\alpha = Id_M$.

(b)⇒(a). Por hipótesis tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, tail, "\alpha"] \arrow[dr, "Id"'] & N \arrow[d, "\beta"] \\ & M \end{tikzcd}$$

Por el corolario anterior $N = \operatorname{Im}\alpha \oplus \operatorname{Ker}\beta$. Además α es mono ya que Id_M es mono. □

Corolario 3.2.13. *Son equivalentes para $\gamma : N \to L$:*

(a) *γ es epi y se escinde.*

(b) *Existe $\delta : L \to N$ tal que $\gamma\delta = Id_L$.*

Demostración. Ejercicio. □

3.3. Sucesiones Exactas

Definición 3.3.1. Un *complejo de cadena* (de R-módulos) es una sucesión:

$$...M_{i-2} \xrightarrow{f_{i-2}} M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+2}...$$

tal que $\operatorname{Im} f_{i-1} \subseteq \operatorname{Ker} f_i$.
Decimos que la *sucesión es exacta* si $\operatorname{Im} f_{i-1} = \operatorname{Ker} f_i$ para todo $i \in \mathbb{Z}$
Si la sucesión

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

es exacta decimos que es una *sucesión exacta corta*.

Observación 3.3.2. Sea

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta corta entonces:

1. f es monomorfismo
2. g es epimorfismo

Demostración. Ejercicio. □

Lema 3.3.3. *Sea*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[d, "\gamma"'] \\ A' \arrow[r, "f'"] & B' \arrow[r, "g'"] & C' \end{tikzcd}$$

conmutativo y con renglones exactos.

1. *Si γ, α, f' son monomorfismos, entonces β es monomorfismo.*
2. *Si α, γ, g son epimorfismos, entonces β es epi.*
3. *Si β es monomorfismo y α, g epimorfismos, entonces γ es monomorfismo.*
4. *Si β es epimorfismo y f', γ monomorfismos, entonces α es epi.*

Demostración. 1. Sea $b \in B$ tal que $\beta(b) = 0$. Como el diagrama es conmutativo entonces $\gamma(g(b)) = 0$ pero γ es monomorfismo entonces $g(b) = 0$, i.e. $b \in \operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$. Entonces existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Por la conmutatividad del diagrama $f'(\alpha(a)) = \beta(f(a)) = \beta(b) = 0$ pero α y f' son monomorfismos, así que $a = 0$ y $f(a) = 0$. Por lo tanto $b = 0$ y β es un monomorfismo.

2. Sea $x \in B'$ y tomemos $g'(x) \in C'$. Como γ es sobre existe $c \in C$ tal que $\gamma(c) = g'(x)$ y como g también es sobre existe $b \in B$ tal que $g(b) = c$. Entonces $\gamma(g(b)) = g'(x) = g'(\beta(b))$ ya que el diagrama conmuta. Tomemos $x - \beta(b) \in B'$. Entonces $g'(x - \beta(b)) = 0$, es decir, $x - \beta(b) \in \operatorname{Ker} g' = \operatorname{Im} f'$ por lo que existe $w \in A'$ tal que $f'(w) = x - \beta(b)$. Como α es sobre existe $a \in A$ tal que $\alpha(a) = w$, lo que implica $\beta(f(a)) = f'(\alpha(a)) = f'(w) = x - \beta(b)$. Tomemos $f(a) + b \in B$. Así $\beta(f(a) + b) = \beta(f(a)) + \beta(b) = x - \beta(b) + \beta(b) = x$. Por lo tanto β es un epimorfismo.

3. Sea $c \in C$ tal que $\gamma(c) = 0$. Como g es sobre existe $b \in B$ tal que $g(b) = c$, entonces $g'(\beta(b)) = \gamma(g(b)) = 0$ lo que implica que $\beta(b) \in \operatorname{Ker} g' = \operatorname{Im} f'$. Así que existe $x \in A'$ tal que $f'(x) = \beta(b)$. Como α es sobre existe $a \in A$ tal que $\alpha(a) = x$ y así $f'(\alpha(a)) = \beta(f(a)) = \beta(b)$ pero β es monomorfismo, entonces $f(a) = b$. Entonces, $0 = g(f(a)) = g(b) = c$ y por lo tanto γ es un monomorfismo.

4. Sea $x \in A'$. Entonces $g'(f'(x)) = 0$. Como β es sobre existe $b \in B$ tal que $\beta(b) = f'(x)$. Así $\gamma(g(b)) = g'(\beta(b)) = g'(f'(x)) = 0$ pero γ es monomorfismo, loque implica que $g(b) = 0$, es decir, $b \in \operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$. Entonces existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$, lo que implica que $f'(\alpha(a)) = \beta(f(a)) = \beta(b) = f'(x)$ pero f' es monomorfismo así que $\alpha(a) = x$. Por lo tanto α es un epimorfismo. □

Lema 3.3.4 (del quinto)**.** *Considere el siguiente diagrma conmutativo*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "\gamma"'] & D \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "\delta"'] & E \arrow[d, "\epsilon"'] \\ A' \arrow[r, "g_1"] & B' \arrow[r, "g_2"] & C' \arrow[r, "g_3"] & D \arrow[r, "g_4"] & E' \end{tikzcd}$$

con renglones exactos.

1. *Si α es epimorfismo y β, δ monomorfismos, entonces γ es un monomorfismo.*

2. *Si ϵ es monomorfismo y β, δ son epimorfismos, entonces γ es un epimorfismo.*

3. *Si ϵ es monomorfismo, α epimorfismo y β, δ isomorfismos, entonces γ es un isomorfismo.*

Demostración. *1.* Sea $c \in C$ tal que $\gamma(c) = 0$. Entonces $\delta(f_3(c)) = g_3(\gamma(c)) = g_3(0) = 0$ pero δ es monomorfismo así que $f_3(c) = 0$. Entonces $c \in \operatorname{Ker} f_3 = \operatorname{Im} f_2$ por lo que existe $b \in B$ tal que $f_2(b) = c$. Ahora, $g_2(\beta(b)) = \gamma(f_2(b)) = \gamma(c) = 0$ entonces $\beta(b) \in \operatorname{Ker} g_2 = \operatorname{Im} g_1$. Así, existe $x \in A'$ tal que $g_1(x) = \beta(b)$. Como α es epimorfismo existe $a \in A$ tal que $\alpha(a) = x$. Tenemos que $\beta(f_1(a)) = g_1(\alpha(a)) = g_1(x) = \beta(b)$ pero β es monomorfismo, entonces $f_1(a) = b$. Así que $c = f_2(b) = f_2(f_1(a)) = 0$ y por lo tanto γ es un monomorfismo.

2. Sea $c' \in C'$. Entonces $g_4(g_3(c')) = 0$. Como δ es epimorfismo, existe $d \in D$ tal que $\delta(d) = g_3(c')$,Así, $\epsilon(f_4(d)) = g_1(\delta(d)) = g_4(g_3(c')) = 0$ pero ϵ es monomorfismo, así que $f_4(d) = 0$ i.e. $d \in \operatorname{Ker} f_4 = \operatorname{Im} f_3$. Por lo tanto existe $c \in C$ tal que $f_3(c) = d$ y se sigue que $g_3(\gamma(c)) = \delta(f_3(c)) = \delta(d) = g_3(c')$. Entonces $g_3(c' - \gamma(c)) = 0$ i.e. $c' - \gamma(c) \in \operatorname{Ker} g_3 = \operatorname{Im} g_2$ por lo que existe $w \in B'$ tal que $g_2(w) = c' - \gamma(c)$. Como β es epimorfismo, existe $b \in B$ tal que $\beta(b) = w$. Entonces $\gamma(f_2(b)) = g_2(\beta(b)) = g_2(w) = c' - \gamma(c)$. Tomando $c + f_2(b)$ tenemos que $\gamma(c + f_2(b)) = \gamma(c) + \gamma(f_2(b)) = \gamma(c) + c' - \gamma(c) = c'$. Por lo tanto γ es un epimorfismo.

3. Se sigue de *1* y *2*. □

Corolario 3.3.5. *Si tenemos el siguiente diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

con renglones exactos y se tiene que $A \cong A'$ y $C \cong C'$, entonces $B \cong B'$.

Definición 3.3.6. Decimos que la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

se escinde si $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g$ es un sumando directo de B.

Ejemplo 3.3.7. (I) Dada una suma directa $M = N \oplus L$ siempre hay una sucesión exacta corta canóonica que se escinde:

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} L \longrightarrow 0$$

donde $i : N \to M$ es la inclusión canónica dada por $i(n) = n + 0$ y $\pi : M \to L$ es la proyección canónica dada por $\pi(n + l) = l$.

(II) Sea K un campo y considere el anillo de matrices de 2×2 triangulares inferiores con coeficientes en K, i.e.,

$$R = \begin{pmatrix} K & 0 \\ K & K \end{pmatrix}.$$

Considere la sucesión exacta corta

$$0 \to \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ K & 0 \end{smallmatrix}\right) \xrightarrow{f} R \xrightarrow{g} \left(\begin{smallmatrix} K & 0 \\ K & 0 \end{smallmatrix}\right) \to 0$$

donde $f\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)$ y $g\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ b & c \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Entonces esta sucesión se escinde.

3.4. El grupo de R-morfismos Hom_R

Definición 3.4.1. Dados ${}_RM$ y ${}_RN$ R-módulos definimos $\mathrm{Hom}_R(M,N) := \{f : M \to N \mid f\ es\ R-morfismo\}$.

Lema 3.4.2. *Sean M y N R-módulos. Entonces* $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ *es un grupo abeliano.*

Demostración. Para $f, g \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$ definimos su suma como el morfismo $f+g : M \to N$ $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$. Entonces $f+g \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$ y se tiene que $(\mathrm{Hom}_R(M,N), +, \overline{0})$ es un grupo abeliano. □

Observación 3.4.3. Dado $f \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$ y $r \in R$, si consideramos $rf : M \to N$ como $(rf)(x) = rf(x)$ no siempre se tiene que rf sea un R-morfismo ya que para $s \in R$, $(rf)(sx) = rf(sx) = rsf(x)$ el cual es distinto de $srf(x) = s(rf)(x)$ si $sr \neq rs$.

Definición 3.4.4. Sean R y S anillos y M un grupo abeliano. Se dice que M es un *R-S-bimodulo* (${}_RM_S$) si M es un R-modulo izquierdo y M es un S-modulo derecho tal que $(rx)s = r(xs)$ para todo $r \in R$, todo $s \in S$ y todo $x \in M$.

Proposición 3.4.5. *Sea ${}_RM_S$ un R-S-bimodulo y ${}_RN$ un R-módulo. Entonces* $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ *es un S-módulo izquierdo.*

Demostración. Sean M un R-S-bimodulo y que N es un R-modulo. Para cada $s \in S$ y $f \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$, definimos $sf : M \to N$ como $(sf)(x) = f(xs)$. Entonces $(sf)(rx+y) = f((rx+y)s) = f(rxs+ys) = f(rxs)+f(ys) = rf(xs)+f(ys) = r(sf)(x)+(sf)(y)$ por lo tanto $sf \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$. Por lo tanto ${}_S\mathrm{Hom}({}_RM_S, {}_RN)$ es un S-modulo izquierdo. □

Teorema 3.4.6. *Para todo R-modulo M, ${}_RM \cong {}_R\mathrm{Hom}(R,M)$.*

Demostración. Como R es un R-R-bimódulo, $\mathrm{Hom}_R(R,M)$ es un R-modulo izquierdo. Definimos $\rho : M \to \mathrm{Hom}_R(R,M)$ de la siguiente manera: dado $m \in M$, $\rho(x) : R \to M$ está dado por $\rho(m)(r) = rm$ para todo $r \in R$. Veamos que ρ es un R-morfismo. Sean $r, s \in R$ y $m, n \in M$. Entonces

$$\rho(rm+n)(s) = s(rm+n) = srm+sn = \rho(m)(sr)+\rho(n)(s)$$

$$= (r\rho)(m)(s)+\rho(n)(s) = (r\rho(m)+\rho(n))(s).$$

Además, si $f \in \mathrm{Hom}_R(R,M)$, tomando $f(1) = x$, se tiene que $f(r) = f(r1) = rf(1) = rx$. Por lo tanto ρ es un epimorfismo. Ahora, si $\rho(x) = \overline{0}$, entonces $rx = \rho(x)(r) = 0$ para todo $r \in R$. En particular $0 = 1x = x$. Por lo tanto ρ es un monomorfismo. Entonces ρ es un isomorphismo. □

Observación 3.4.7. Para todo R-módulo M, el grupo $\mathrm{Hom}_R(M,M)$ es un anillo no trivial, con multiplicación la composición si y solo si $M \neq 0$. A este anillo lo llamamos el *anillo de endomorfismos* de M y lo denotamos por $\mathrm{End}_R(M)$.

Proposición 3.4.8. *Sean M y N R-módulos simples. Entonces todo elemento no cero de* $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ *es un isomorfismo. En particular, si S es simple,* $\mathrm{End}_R(S)$ *es un anillo con división.*

Demostración. Supongamos que M y N son R-módulos simples, si $\varphi : M \to N$ es un R-morfismo y $\varphi \neq \overline{0}$ entonces $\operatorname{Ker}\varphi = 0$ ya que $\operatorname{Ker}\varphi < M$. Por lo tanto φ es un monomorfismo. Además $0 \neq \varphi(M) \leq N$, así que $\varphi(M) = N$. Esto implica que φ es un epimorfismo. Por lo tanto φ es un isomorfismo. Se sigue que el anillo de endomorfismos $\operatorname{End}_R(S)$ de un R-módulo simple ${}_RS$ es un anillo con división. □

Observación 3.4.9. Notemos que si M es un R-módulo tal que $\operatorname{End}_R(M)$ es un anillo con división no implica que M sea un R-módulo simple. Para ver esto, consideremos el $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Q}$ el cual no es simple pero $\operatorname{End}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$. Dejamos esta afirmación como ejercicio al lector.

Observación 3.4.10. Por el Teorema 3.4.6, ${}_RR \cong \operatorname{End}_R(R)$. Se puede ver que este isomorfismo cumple que si $f, g \in \operatorname{End}_R(R)$ entonces $\rho(fg) = \rho(g)\rho(f)$. Dado un anillo R, se define el *anillo opuesto* de R, denotado R^{op}, como el anillo con la misma suma que R pero con producto $a \cdot b = ba$ para todo $a, b \in R^{op}$. Así, tenemos un isomorfismo de anillos $R^{op} \cong \operatorname{End}_R(R)$.

Capítulo 4

Nociones Básicas de Categorias

4.1. Definición de Categoría

Definición 4.1.1. Una *categoría* $\mathcal{C}$ consta de una clase de *objetos* que denotamos $Obj(\mathcal{C})$, y para cada pareja de objetos (A, B) de $\mathcal{C}$ hay un conjunto, denotado $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, cuyos elementos llamamos *morfismos* y que satisface:

1. Si $(A, B) \neq (C, D)$ entonces $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \cap \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D) = \phi$

2. Para cada terna de objetos (A, B, C) en $\mathcal{C}$ existe una función

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$$

$$(\alpha, \beta) \longmapsto \alpha\beta$$

   que llamamos composición y que cumple:

   a) $\gamma(\alpha\beta) = (\gamma\alpha)\beta$ (Asociatividad).

   b) Para todo objeto A de $\mathcal{C}$ existe un morfismo $1_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$ tal que $1_B\alpha = \alpha = \alpha 1_A$ para todo $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ (Morfismo identidad).

Ejemplo 4.1.2. (I) La categoría de Conjuntos, Sets. $Obj(Sets)$ = Clase de los conjuntos
$\mathrm{Hom}_{Sets}(A, B) = \{f : A \to B \mid f \text{ } \textit{es función}\}$

(II) La categoría de grupos, *Gps*, donde los objetos son grupos y los morfismo son homomorfismos de grupos.

(III) La categoría de groups Abelianos, *Ab*, donde los objetos son grupos abelianos y los morfismos son homomorfismos de grupos.

(IV) La categoría de anillos, Rings, con objetos anillos y homomorfismos de anillos.

(v) La categoría de R-módulos, R-Mod, con objetos módulos izquierdos y morfismos R-morfismos.

(vi) Sea G un monoide y * un objeto cualquiera. La categoría $\widehat{G}$ tiene un solo objeto $\{*\}$ y $\mathrm{Hom}_{\widehat{G}}(*, *) = G$.

(vii) Espacios Topológicos, Top. $Obj(Top)$=Espacios topológicos. Si X y Y son espacios topológicos $\mathrm{Hom}_{Top}(X, Y)$ son las funciones continuas de X en Y.

(viii) Sea A un COPO. Vemos a A como categoría de la siguiente forma: $Obj(A) = A$. Si $x, y \in A$ entonces $\mathrm{Hom}_A(x, y) = \{*\}$ si $x \leq y$ y $\mathrm{Hom}_A(x, y) = \emptyset$ en otro caso.

Definición 4.1.3. Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N)$. Decimos que:

1. φ es *monomorfismo* si siempre que $\varphi f = \varphi g$ para $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(L, M)$, se tiene que $f = g$.

2. φ es *epimorfismo* si siempre que $f\varphi = g\varphi$ para $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N, L)$, se tiene que $f = g$.

3. φ es *bimorfismo* si es monomorfismo y epimorfismo.

4. φ es *isomorfismo* si existe $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N, M)$ tal que $\varphi f = Id_N$ y $f\varphi = Id_M$

Ejemplo 4.1.4. Sea $(\mathbb{N}, \cdot, 1)$ el monoide multiplicativo de los números naturales. Consideremos la categoría $\widehat{\mathbb{N}}$ la cual solo tiene un objeo $*$ y $\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathbb{N}}}(*, *) = \mathbb{N}$. Como $\mathbb{N}$ tiene cancelación y la operación es conmutativa, entonces todo $n \in \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathbb{N}}}(*, *)$ es monomorfismo y epimorfismo. De este ejemplo vemos que bimorfismo no implica isomorfismo.

Teorema 4.1.5. *Sea $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ un morfismo en la categoría R-Mod. Entonces:*

1. φ es monomorfismo $\Leftrightarrow$ φ es inyectiva.

2. φ es epimorfismo $\Leftrightarrow$ φ es suprayectiva o sobre.

3. φ es biyectiva $\Leftrightarrow$ φ es bimorfismo $\Leftrightarrow$ φ es isomorfismo.

Demostración. *1* $\Rightarrow$. Sean $x, y \in M$ tales que $\varphi(x) = \varphi(y)$. Entonces $\varphi(x - y) = 0$. Tomemos $R(x-y)$ y consideremos la inclusión canónica $i : R(x - y) \hookrightarrow M$ y el morfismo cero $\overline{0} : R(x - y) \to M$. Se tiene que $\varphi i (r (x - y)) = r\varphi(x - y) = 0$ y $\varphi\overline{0}(r(x - y)) = \varphi(0) = 0$, es decir, $\varphi i = \varphi\overline{0}$. Por hipótesis, $i = \overline{0}$ lo que implica que $R(x-y) = 0$ y por lo tanto $x = y$.

$\Leftarrow$. Sean $f, g : L \to M$ tal que $\varphi f = \varphi g$ con φ inyectiva. Si $f \neq g$ entonces existe $x \in L$ tal que $f(x) \neq g(x)$ y como φ es inyectiva $\varphi f(x) \neq \varphi g(x)$. Por lo tanto $\varphi f \neq \varphi g$, contradicción.

2 $\Rightarrow$. Sea $I = \mathrm{Im}\,\varphi$ y tomemos la proyección canonica $\pi : N \to N/I$ y el morfismo $\overline{0} : N \to N/I$. Sea $m \in M$. Entonces $\pi\varphi(m) = \pi(\varphi(m)) = 0$ y $\overline{0}\varphi(m) = 0$. Como φ es un epimorfismo, $\pi = \overline{0}$. Esto implica que $N \subseteq I$ y por lo tanto $N = I$.

$\Leftarrow$. Supongamos $f\varphi = g\varphi$ con $f \neq g$. Entonces existe $x \in N$ tal que $f(x) \neq g(x)$ pero φ es sobre, así que $x = \varphi(y)$ para algún $y \in M$. Así, $f\varphi(y) \neq g\varphi(y)$. Por lo tanto $f\varphi \neq g\varphi$, contradicción.

3. Es claro, por los incisos anteriores que φ es biyectiva $\Leftrightarrow$ φ es bimorfismo. Ahora, si φ es biyección por la Observación 2.1.12.*2*, φ^{-1} es un R-morfismo, entonces φ es isomorfismo. Por otro lado, si φ es isomorfismo entonces existe un R-morfismo $f : N \to M$ tal que $\varphi f = Id_N$ y $f\varphi = Id_M$. Lo que implica que φ es inyectiva y es suprayectiva por lo tanto φ es biyectiva. □

Observación 4.1.6. Notemos de la prueba del teorema anterior que siempre se tiene que función inyectiva (resp. suprayectiva) implica monomorfismo (resp. epimorfismo) sin embargo el regreso no se tiene en general. Consideremos la categoría *Rings*. Entonces el morfismo inclusión $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ es un epimorfismo pero claramente no es suprayectivo.

Demostración. Ejercicio. □

Usando el Teorema 4.1.5 y las Proposiciones 3.1.12 y 3.1.13 tenemos los siguientes resultados

Corolario 4.1.7. *Son equivalentes para un R-morfismo $\varphi : M \to N$:*

(a) *φ es monomorfismo.*

(b) *φ es inyectiva.*

(c) $\operatorname{Ker}\varphi = 0$

(d) *Para todo L en R-Mod, si $\psi : L \to M$ es tal que $\varphi\psi = 0$ entonces $\psi = 0$.*

Demostración. (a)$\Leftrightarrow$(b) es por el Teorema 4.1.5 y (b)$\Leftrightarrow$(c) por la Proposición 3.1.12.

(a)$\Rightarrow$(d) Supongamos $\varphi\psi = 0$. Tenemos que $\varphi 0 = 0$ entonces $\varphi\psi = \varphi 0$. Como φ es monomorfismo se tiene que $\psi = 0$.

(d)$\Rightarrow$(c) Sean $K = \operatorname{Ker}\varphi$ e $i : K \hookrightarrow M$ la inclusión. Entonces $\varphi i(K) = \varphi(K) = 0$ así que $\varphi i = 0$. Por hipótesis se tiene que $i = 0$ lo que implica que $K = 0$. □

Corolario 4.1.8. *Son equivalentes para un R-morfismo $\varphi : M \to N$:*

(a) *φ es epimorfismo.*

(b) *φ es suprayectiva.*

(c) $Coker(\varphi) = 0$

(d) *Para todo L en R-Mod, si $\psi : N \to L$ es tal que $\psi\varphi = 0$ entonces $\psi = 0$.*

Demostración. Ejercicio. □

Regresemos al contexto general

Proposición 4.1.9. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Sean $\varphi \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N)$ y $\psi \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(N, L)$ entonces:*

1. φ, ψ monomorfismos $\Rightarrow$ $\psi\varphi$ es monomorfismo.

2. *φ, ψ epimorfismos $\Rightarrow$ $\psi\varphi$ es epimorfismo.*

3. *$\psi\varphi$ es monomorfismo $\Rightarrow$ φ es monomorfismo.*

4. *$\psi\varphi$ es epimorfismo $\Rightarrow$ ψ es epimorfismo.*

Demostración. Solo se demostrará *1* y *3*, los incisos *2* y *4* son completamente análogos.

1. Supongamos que $(\psi\varphi)f = (\psi\varphi)g$. Como la composición es asociativa, $\psi(\varphi f) = \psi(\varphi g)$. Entonces $\varphi f = \varphi g$ porque ψ es monomorfismo. Como φ también es monomorfismo, $f = g$.

3. Supongamos que $\varphi f = \varphi g$. Entonces $\psi(\varphi f) = \psi(\varphi g)$, asociando $(\psi\varphi)f = (\psi\varphi)g$ lo que implica que $f = g$ ya que $\psi\varphi$ es monomorfismo. □

4.2. Funtores

Definición 4.2.1. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías. Un *funtor* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es una asignación de los $Obj(\mathcal{C})$ en $Obj(\mathcal{D})$ y una asignación de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ en $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$ para cada dos objetos A, B de $\mathcal{C}$ de tal manera que se respeta la composición, es decir, si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, E)$ y $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ entonces $F(fg) = F(f)F(g)$ y $F(1_A) = 1_{F(A)}$.

Observación 4.2.2. En la definición anterior al funtor F se le llama *funtor covariante* o simplemente funtor. Si dada $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ se tiene que $F(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(B), F(A))$ entonces decimos que el funtor es *contravariante*.

Ejemplo 4.2.3. (I) Consideremos la categoría de grupos abelianos Ab y la categoría de conjuntos $Sets$. Hay un funtor $U : Ab \to Sets$ tal que dado G un grupo abeliano $U(G)$ es solo G como conjunto, y dado un morfismo de grupos abelianos α, $U(\alpha)$ es α visto solo como función. A U se le llama *el funtor que olvida.*

(II) Sean G, H grupos abelianos y consideremos las categorías $\widehat{G}$ y $\widehat{H}$. Si $f : G \to H$ es un morfismo de grupos abelianos entonces f nos define un funtor $\widehat{f} : \widehat{G} \to \widehat{H}$ definido como: $\widehat{f}(*) = *$ y para cada $g \in \mathrm{Hom}_{\widehat{G}}(*, *) = G$, $\widehat{f}(g) = f(g) \in H = \mathrm{Hom}_{\widehat{H}}(*, *)$. Claramente $\widehat{f}(gl) = \widehat{f}(g)\widehat{f}(l)$ y $\widehat{f}(1_{\widehat{G}}) = 1_{\widehat{H}}$

(III) Sea X un espacio topológico y sea $\mathcal{O}(X)$ el COPO de abiertos de X. Definimos el funtor $P : \mathcal{O}(X) \to Sets$ como: Dado un abierto $U \in \mathcal{O}(X)$ $P(U) = C(U, \mathbb{R})$ el conjunto de funciones continuas de U en $\mathbb{R}$. Ahora si $U \leq V$ i.e. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}(X)}(U, V) = \{*\}$ damos la siguiente función $r : P(V) \to P(U)$ (el funtor P es contravariante) definida como $r(f) = f|_U$ la restricción de f a U.

(IV) El grupo fundamental de un espacio topológico nos define un funtor $\pi_1 : Top \to Gps$.

(V) Conideremos la categoria DE cuyos objetos son dominios enteros y los morfismo son homomorfismos inyectivos de anillos. Sea $Camp$ la categoría de campos. Si D es un dominio entero podemos construir su campo de fracciones $K(D)$. Entonces $K(\_)$ nos define un funtor de DE en $Camp$.

(VI) La asignación $\_[x] : Rings \to Rings$ dada por $\_[x](R) = R[x]$, el anillo de polinomios con coeficientes en R, y $\_[x](f) : R[x] \to S[x]$ como $\_[x](f)(\sum r_i x^i) = \sum f(r_i)x^i$ si $f : R \to S$ es un morfismo de anillos, nos define un funtor.

Ejemplo 4.2.4. Dado un R-módulo M tenemos el siguiente funtor

$$\mathrm{Hom}_R(M, \_) : R - Mod \to Ab$$

Definido de la siguiente manera: Si N es un R-módulo entonces $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ es un grupo abeliano. Ahora, si $f : N \to L$ es un R-morfismo,

$$\mathrm{Hom}_R(M, f) : \mathrm{Hom}_R(M, N) \to \mathrm{Hom}_R(M, L)$$

es un morfismo de grupos abelianos que se calcula como $\mathrm{Hom}_R(M, f)(g) = fg$.

De forma análoga tenemos el funtor

$$\mathrm{Hom}_R(\_, M) : R - Mod \to Ab$$

solo que este funtor es contravariante, es decir, si $f : N \to L$ es un R-morfismo entonces

$$\mathrm{Hom}_R(f, M) : \mathrm{Hom}_R(L, M) \to \mathrm{Hom}_R(N, M)$$

calculado como $\mathrm{Hom}_R(f, M)(h) = hf$.

Proposición 4.2.5. *El funtor* $\mathrm{Hom}_R(\_, \_)$ *es* exacto izquierdo *dejando fija cualquiera de las entradas. Es decir, si*

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

es una sucesión exacta entonces la sucesión

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(M, A) \to \mathrm{Hom}_R(M, B) \to \mathrm{Hom}_R(M, C)$$

obtenida al aplicar el funtor $\mathrm{Hom}_R(M, \_)$ *es exacta. Análogamente si se considera el funtor* $\mathrm{Hom}_R(\_, M)$.

Demostración. Veamos el caso de $\mathrm{Hom}_R(\_, N)$, el otro caso es análogo. Sea

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta corta, apliquemos el funtor $\mathrm{Hom}_R(\_, N)$ a la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C, N) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(B, N) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(A, N)$$

donde $f^* = \mathrm{Hom}_R(f, N)$ y $g^* = \mathrm{Hom}_R(g, N)$. Si $g^*(\varphi) = 0$ entonces $\varphi g = 0$. Como g es sobre, $\varphi = 0$. Lo que implica que g^* es monomorfismo. Sea $\varphi \in \operatorname{Ker} f^*$, i.e., $\varphi f = 0$. Podemos definir $\psi : C \to N$ como $\psi(g(x)) = \varphi(x)$ y así $\varphi = g^*(\psi)$. Ahora si $\varphi \in \operatorname{Im} g^*$ se tiene que $\varphi = \psi g$ para algún $\psi : C \to N$ lo que implica que $\varphi f = \psi g f = 0$. Por lo tanto $\operatorname{Ker} f^* = \operatorname{Im} g^*$. $\square$

Proposición 4.2.6. *Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ R-morfismos. Si para todo R-módulo M se tiene que la sucesión*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C, M) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(B, M) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(A, M)$$

es exacta entonces la sucesión

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

es exacta.

Demostración. Pagina 63 Rotman Algebra Homologica. □

Dada una categoria $\mathcal{C}$ y $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ se suele escribir al morfismo φ como una flecha con domino A y codominio B

$$\varphi : A \to B$$

4.3. Producto y Coproducto

Definición 4.3.1. Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de objetos de $\mathcal{C}$.

1. Un *producto* de la familia $\{A_i\}_{i\in I}$ es una pareja $(P, \{\pi_i\}_{i\in I})$ tal que:
   a) $P \in Obj(\mathcal{C})$
   b) $\{\pi_i\}_I$ es una familia de morfismos de $\mathcal{C}$ tale que $\pi_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P, A_i)$.
   c) Para toda familia de morfismos $\gamma_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A_i)$ $i \in I$ y $C \in Obj(\mathcal{C})$ existe una única $\gamma \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, P)$ tal que $\gamma_i = \pi_i\gamma$ $\forall i \in I$
2. Un *coproducto* de la familia $\{A_i\}_{i\in I}$ es una pareja $(Q, \{\eta_i\}_{i\in I})$ tal que:
   a) $Q \in Obj(\mathbf{C})$
   b) $\{\eta_i\}_I$ es una familia de morfismos de $\mathcal{C}$ tale que $\eta_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A_i, Q)$.
   c) Para toda familia de morfismos $\alpha_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A_i, B)$ $i \in I$ y $B \in Obj(\mathcal{C})$ existe una única $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q, B)$ tal que $\alpha_i = \alpha\eta_i$ $\forall i \in I$

Teorema 4.3.2. *Sea $(P, \{\pi_i\}_I)$ un producto de la familia $\{A_i\}$ en la categoría $\mathcal{C}$. Entonces una pareja $(P', \{\pi'_i\}_I)$, donde $\pi'_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P', A_i)$ es también un producto de la familia si y solo si existe un isomorfismo $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P', P)$ tal que:*

$$\begin{tikzcd} P' \arrow[r, "\varphi", "\cong"'] \arrow[d, "\pi'_i"'] & P \arrow[dl, "\pi_i"] \\ P_i & \end{tikzcd}$$

conmuta para todo $i \in I$. Es decir el producto de una familia, si existe, es único salvo isomorfismo.

Demostración. Como $(P, \{\pi_i\}_I)$ es un producto entonces para la familia $\{\pi'_i\}_I$ existe un único $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M', M)$ tal que $\pi_i\varphi = \pi'_i$ para todo $i \in I$.

$\Rightarrow$. Sumpongamos que $(P', \{\pi'_i\}_I)$ es un producto entonces existe un único $\varphi' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, M')$ tal que $\pi'_i\varphi' = \pi_i$, entonces $\pi_i(\varphi\varphi') = \pi_i$ pero $\pi_i Id_M = \pi_i$ para toda $i \in I$. Entonces por la unicidad del morfismo tenemos que $\varphi\varphi' = Id_M$. Analogamente se tiene que $\varphi'\varphi = Id_{M'}$. Por lo tanto φ es un isomorfismo.

$\Leftarrow$. Sea $\varphi : \pi' \to P$ un isomorfismo y $\{f_i\}_I$ una familia de morfismos $f_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A_i)$ para toda $i \in I$. Entonces existe un único $h : C \to P$ tal que $\pi_i h = f_i$ para todo $i \in I$. Sea $\gamma = \varphi^{-1}h$ de C en P', entonces $\pi'_i\gamma = \pi'_i\varphi^{-1}h = \pi_i h = f_i$. Además si $\gamma' : C \to P'$ es tal que $\pi'_i\gamma' = f_i$ para toda $i \in I$, entonces $\pi_i(\varphi\gamma') = \pi'_i\gamma' = f_i$. Por la unicidad de h, $\varphi\gamma' = h$ asi que $\gamma' = \varphi^{-1}h = \gamma$ Por lo tanto $(P', \{\pi'_i\}_I)$ es un producto. $\square$

Teorema 4.3.3. *Sea $(Q, \{\eta_i\}_I)$ un coproducto de la familia $\{Q_i\}_I$ en la categoría $\mathcal{C}$. Entonces, $(Q', \{\eta'_i\}_I)$ donde $\eta_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q_i, Q')$ es también un coproducto de la familia si y solo si existe un único isomorfismo $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q, Q')$ tal que:*

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, "\psi", "\cong"'] & Q' \\ Q_i \arrow[u, "\eta_i"] \arrow[ur, "\eta'_i"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta $\forall i \in I$. Es decir el coproducto de una familia, si existe, es único salvo isomorfismo.

Demostración. Como $(Q, \{\eta_i\}_I)$ es un coproducto entonces para la familia de morfismos $\{\eta'_i\}_I$ existe un único morfismo $\psi : Q \to Q'$ tal que $\psi\eta_i = \eta'_i$ para toda $i \in I$.

$\Rightarrow$: Supongamos que $(Q', \{\eta'_i\})$ es un coproducto. Entonces exite un único morfismo $\psi' : Q' \to Q$ tal que $\psi'\eta'_i = \eta_i$ para toda $i \in I$. Como $Id_{Q'}\eta'_i = \eta'_i$ y tambien $(\psi')\eta'_i = \eta'_i$, de la unicidad se sigue que $\psi\psi' = Id_{Q'}$. Analogamente $\psi'\psi = Id_Q$. Por lo tanto ψ es un isomorfismo.

$\Leftarrow$: Supongamos que existe $\psi : Q \to Q'$ isomorfismo tal que $\psi\eta_i = \eta'_i$. Tomemos $\{\gamma_i\}_I$ con $\gamma_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q_i, B)$ para todo $i \in I$. Como $(Q, \{\eta_i\}_I)$ es un coproducto entonces existe un unico $h : Q \to B$ tal que $h\eta_i = \gamma_i$ para toda $i \in I$. Sea $f = h\psi^{-1}$. Entonces

$$f\eta'_i = h\psi^{-1}\eta'_i = h\psi^{-1}\psi\eta_i = h\eta_i = \gamma_i.$$

Si $f' : Q' \to B$ es tal que $f'\eta'_i = \gamma_i$ $\forall i \in I$. Entonces $(f'\psi)\eta_i = f'\eta'_i = \gamma_i$, por la unicidad de h se tiene que $f'\psi = h$, por lo tanto $f' = h\psi^{-1} = f$. $\square$

Ejemplo 4.3.4. 1. Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia no vacia de conjuntos, el producto cartesiano de la familia se define como

$$\prod_{i\in I} A_i = \left\{ f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i \mid f \text{ es función y } f(i) \in A_i \ \forall i \in I \right\}$$

Para cada $i \in I$ definimos $\pi_i : \prod A_i \to A_i$ como $\pi_i(f) = f(i)$ que se les llama las proyecciones canónicas. Entonces $(\prod A_i, \{\pi_i\}_I)$ es el producto de la familia $\{A_i\}_{i\in I}$ en la categoría $Sets$. Dado un elemento $f \in \prod A_i$ se suele escribir $f = (f_i)_I$ donde $f_i = f(i) \in A_i$.

2. Sea L una retícula (Definición 2.1.8) vista como categoría (Ejemplo 4.1.2(8)). Sean $x, y \in L$, entonces $x \wedge y \in L$ es el producto de x y y en L. El coproducto de x y y en L es el elemento $x \vee y \in L$.

4.4. Producto Fibrado y Coproducto Fibrado

Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Considerer el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\
M \arrow[r, "\psi"] & N
\end{tikzcd}$$

Definición 4.4.1. 1. El par (ψ, β) es llamado el *coproducto fibrado* del par (φ, α) si para cualquier par (ψ', β') con $\psi' : M \to X$, $\beta' : B \to X$ y $\psi'\varphi = \beta'\alpha$ existe un único $\sigma : N \to X$ tal que $\psi' = \sigma\psi$ y $\beta' = \sigma\beta$.

2. El par (φ, α) es llamado el *producto fibrado* del par (ψ, β) si para cualquier par (φ', α') con $\varphi' : Y \to M$, $\alpha' : Y \to B$ existe un único $\tau : Y \to A$ tal que $\varphi' = \varphi\tau$ y $\alpha' = \alpha\tau$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi"'] & B \arrow[d, "\beta"] \arrow[ddr, "\beta'"] & \\
M \arrow[r, "\psi"] \arrow[drr, "\psi'"'] & N \arrow[dr, dashed, "\sigma"] & \\
 & & X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Y \arrow[dr, dashed, "\tau"] \arrow[drr, "\alpha'"] \arrow[ddr, "\varphi'"'] & & \\
 & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi"] & B \arrow[d, "\beta"] \\
 & M \arrow[r, "\psi"] & N
\end{tikzcd}$$

Proposición 4.4.2. *El coproducto fibrado del par (φ, α) y el producto fibrado del par (ψ, β), son unicos salvo isomorfismos.*

Demostración. Sean (ψ, β) y (ψ', β') dos pushouts para (φ, α), entonces por la definición de pullback tenemos que existen $\sigma : N \to X$ y $\rho : X \to N$ tales que $\psi' = \sigma\psi$, $\beta' = \sigma\psi$ y $\psi = \rho\psi'$, $\beta = \rho\beta'$. Asi para $\rho\sigma : N \to N$ tenemos que $\psi = \rho\psi' = \rho\sigma\psi$ y $\beta = \rho\beta' = \rho\sigma\beta$ de lo que se sigue que $\rho\sigma = Id_N$. Analogamente $\sigma\rho = Id_X$ por lo tanto ρ y σ son isomorfismos uno inverso del otro.

Ahora sean (φ, α) y (φ', α') dos pullbacks para (ψ, β), entonces tenemos que existen $\tau : Y \to A$ y $\tau' : A \to Y$ tales que $\alpha' = \alpha\tau$, $\varphi' = \varphi\tau$ y $\alpha = \alpha'\tau'$, $\varphi = \varphi'\tau'$. Para $\tau\tau' : A \to A$ tenemos que $\alpha = \alpha'\tau' = \alpha\tau\tau'$ y $\varphi = \varphi'\tau' = \varphi\tau\tau'$, asi que por lo tanto $\tau\tau' = Id_A$. Analogamente $\tau'\tau = Id_Y$ lo que implica que τ y τ' son isomorfismos uno inverso del otro. $\square$

Ejemplo 4.4.3. 1. Sea C un conjunto. Tomemos $\mathbf{P}(C)$ el conjunto potencia de C, el cual es una retícula. Sean $A, B \in \mathbf{P}(C)$. Denotemos $\psi : A \hookrightarrow C$ y $\beta : B \hookrightarrow C$ las funciones inclusiones. Consideremos $A \cap B$ y sean $\varphi : A \cap B \hookrightarrow A$ y $\alpha : A \cap B \hookrightarrow B$ las inclusiones. Entonces el par (φ, α) es el producto fibrado del par (ψ, β).

$$\begin{tikzcd} A \cap B \arrow[r, hook, "\alpha"] \arrow[d, hook, "\varphi"'] & B \arrow[d, hook, "\beta"] \\ A \arrow[r, hook, "\psi"'] & C \end{tikzcd}$$

2. Ahora, sea X un conjunto y consideremos $A, B, C \in \mathbf{P}(X)$ tales que $A \subseteq B$ y $A \subseteq C$. Sean $\alpha : A \hookrightarrow B$ y $\varphi : A \hookrightarrow C$ las inclusiones. Consideremos $B \cup C$ y sean $\psi : C \hookrightarrow B \cup C$ y $\beta : B \hookrightarrow B \cup C$ las inclusiones. Entonces el par (ψ, β) es el coproducto fibrado del par (φ, α).

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "\alpha"] \arrow[d, hook, "\varphi"'] & B \arrow[d, hook, "\beta"] \\ C \arrow[r, hook, "\psi"'] & B \cup C \end{tikzcd}$$

Proposición 4.4.4. *Supongamos que tenemos el diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ M \arrow[r, "\psi"] & N \end{tikzcd}$$

1. Si (φ, α) es el producto fibrado del par (ψ, β), entonces

(a) *Si β es un monomorfismo entonces φ también lo es.*

(b) *Si ψ es monomorfismo entonces α también lo es*

2. Si (ψ, β) es el coproducto fibrado del par (φ, α), entonces

(a) *Si α es un epimorfismo entonces ψ también lo es.*

(b) *Si φ es un epimorfismo entonces β también lo es.*

Demostración. Sólo probaremos *1.*(a) y *2.*(a). los otros dos resultados son análogos.

1.(a). Supongamos que β es monomorfismo y sean $f, g : X \to A$ tales que $\varphi f = \varphi g$. Entonces $\psi\varphi f = \psi\varphi g$, como el diagrama conmuta $\beta\alpha f = \beta\alpha g$. Por hipótesis β es monomorfismo así que $\alpha f = \alpha g$. Notemos que $\beta(\alpha g) = \psi(\varphi f)$ entonces por la propiedad universal del producto fibrado existe un único $h : X \to A$ tal que $\varphi h = \varphi f$ y $\alpha h = \alpha g$ lo que implica que $f = h = g$.

2.(a). Supongmos que tenemos $f, g : N \to X$ tales que $f\psi = g\psi$. Entonces $f\psi\varphi = g\psi\varphi$, como el diagrama conmuta $f\beta\alpha = g\beta\alpha$. Por hipótesis α es epimorfismo así que $f\beta = g\beta$. Notemos que $(f\beta)\alpha = (g\psi)\varphi$ así que por la propiedad universal del coproducto fibrado existe un único $h : N \to X$ tal que $h\beta = f\beta$ y $h\psi = g\psi$ lo que implica que $f = h = g$. $\square$

Capítulo 5

Producto y Coproducto en R-Mod

5.1. Producto y Coproducto en R-Mod

Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de R-módulos izquierdos. En el producto cartesiano $\prod\{M_i\}_{i\in I}$ definimos una suma y un producto por elementos de R de la siguiente manera:

Sean $(x_i)_I, (y_i)_I \in \prod\{M_i\}_{i\in I}$ y $r \in R$

$$(x_i)_I + (y_i)_I := (x_i + y_i)_I$$

$$r(x_i)_I := (rx_i)_I$$

Con estas operaciones $\prod_I M_i$ es un R-módulo izquierdo.

Definición 5.1.1. Dado $(x_i)_I \in \prod\{M_i\}_{i\in I}$ el *soporte* de $(x_i)_I$ denotado *sop*$((x_i)_I)$, es el subconjunto de I donde cada $x_j \neq 0$.

Lema 5.1.2. *Sea $\{M_i\}_I$ una familia de R-módulos. Consideremos el siguiente subconjunto de $\prod_I M_i$.*

$$\coprod\{M_i\}_{i\in I} = \Big\{(x_i)_I \in \prod\{M_i\}_{i\in I} \mid sop((x_i)_I) \text{ es finito}\Big\}$$

Entonces $\coprod_I M_i$ es un submódulo de $\prod_I M_i$

Demostración. Notemos que $(0_i)_I \in \coprod\{M_i\}_{i\in I}$ ya que *sop*$((x_i)_I) = \emptyset$. Ahora si $(x_i)_I, (y_i)_I \in \coprod\{M_i\}_{i\in I}$ entonces

$$j \in sop((x_i)_I + (y_i)_I) \Leftrightarrow j \in sop((x_i + y_i)_I) \Leftrightarrow x_j + y_j \neq 0$$

así que $x_j \neq 0$ o $y_j \neq 0$, es decir, $j \in sop((x_i)_I) \cup sop((y_i)_I)$. Por lo tanto *sop*$((x_i)_I + (y_i)_I)$ es finito. Si $r \in R$ y $(x_i)_I \in \coprod\{M_i\}_{i\in I}$ entonces

$$j \in sop(r(x_i)_I) \Leftrightarrow j \in sop((rx_i)_I) \Leftrightarrow rx_j \neq 0$$

así que $x_j \neq 0$, es decir, $j \in sop((x_i)_I)$ que es finito. $\square$

Teorema 5.1.3. *Sea $\{M_i\}_I$ una familia de R-módulos. Entonces $(\prod\{M_i\}_{i\in I}, \{\pi_i\}_I)$ es el producto de la familia $\{M_i\}_I$ en la categoria R-Mod, dónde los π_i son las proyecciones canónicas.*

Demostración. Supongamos que C esta en R-Mod y $\{\gamma_i\}_I$ familia de R-morfismos, $\gamma_i : C \to M_i$. Definimos

$$\begin{aligned} \gamma : \quad & C \longrightarrow \textstyle\prod\{M_i\}_{i\in I} \ . \\ & c \longmapsto (\gamma_i(c))_I \end{aligned}$$

Así, para $x, y \in C$ y $r \in R$, $\gamma(rx + y) = (\gamma_i(rx + y))_I = (r\gamma_i(x) + \gamma(y))_I = r(\gamma_i(x))_I + (\gamma_i(y))_I = r\gamma(x) + \gamma(y)$. Por lo tanto γ es un R-morfismo. Dada $j \in I$, $\pi_j(\gamma(c)) = \pi((\gamma_i(c))_I) = \gamma_j(c)$ lo que implica que $\pi_j\gamma = \gamma_j$. Por último, si $\gamma' : C \to \prod\{M_i\}_{i\in I}$ es un R-morfismo tal que $\pi_j\gamma' = \gamma_j$ para toda $j \in I$ entonces $\pi_j(\gamma'(c)) = \gamma_j(c) = \pi_j(\gamma(c))$, así que $\forall j \in I$ la j-ésima coordenada de $\gamma'(c)$ es la misma que la de $\gamma(c)$. Entonces $\gamma'(c) = \gamma(c)$ y por lo tanto $\gamma' = \gamma$ □

Teorema 5.1.4. *Sea $\{M_i\}_I$ una familia de R-módulos. Entonces $(\coprod_{i\in I} M_i, \{\eta_i\}_I)$ es el coproducto de la familia $\{M_i\}_I$ en la categoria R-Mod, dónde los morfismos η_i están definidos de la siguiente manera:*

$$\begin{aligned} \eta_i : \quad & M_i \longrightarrow \textstyle\coprod_{i\in I} M_i \\ & x_i \longmapsto (\overline{x_i}) \end{aligned}$$

Donde $(\overline{x_i})$ es el elemento del producto $(x_j)_I$ tal que $x_j = 0$ para toda $j \neq i$ y x_i si $j = i$. A estas funciones se les llama las inclusiones canónicas del coproducto.

Demostración. Notemos que cada η_i es un R-morfismo ya que

$$\eta_i(rx_i + y_i) = (\overline{rx_i + y_i})_I = (\overline{rx_i})_I + (\overline{y_i})_I = r(\overline{x_i})_I + (\overline{y_i})_I = r\eta_i(x_i) + \eta_i(y_i)$$

Supongamos que $\alpha_i : M_i \to B$ con $i \in I$ es una familia de R-morfismos. Definimos:

$$\begin{aligned} \alpha : \quad & \textstyle\coprod_{i\in I} M_i \longrightarrow B \\ & (x_i)_I \longmapsto \textstyle\sum_I \alpha_i(x_i) \end{aligned}$$

La suma esta bien definida ya que solo hay numero finito de $i \in I$ tales que $x_i \neq 0$. Notemos que $\alpha(r(x_i)_I + (y_i)_I) = \alpha((rx_i + y_i)_I) = \sum_I \alpha_i(rx_i + y_i) = \sum_I r\alpha_i(x_i) + \alpha_i(y_i) = r\sum_I \alpha_i(x_i) + \sum_I \alpha_i(y_i) = r\alpha((x_i)_I) + \alpha((y_i)_I)$, por lo tanto α es un R-morfismo. Para cada $i \in I$ se tiene que $\alpha\eta_i((x_i)_I) = \alpha((\overline{x_i})_I) = \alpha_i(x_i)$. Por lo tanto $\alpha\eta_i = \alpha_i$ para toda $i \in I$. Ahora supongamos que existe $\alpha' : \coprod_{i\in I} M_i \to B$ tal que $\alpha'\eta_i = \alpha_i$ para todo $i \in I$. Entonces $\alpha\eta_i(x_i) = \alpha'\eta_i(x_i)$ para todo $x_i \in M_i$. Así $\alpha((\overline{x_i})_I) = \alpha'((\overline{x_i})_I)$. Notemos que, si $(a_i)_I \in \coprod_{i\in I} M_i$ entonces $(a_i)_I = \sum_{sop}(\overline{a_i})$. Por lo que $\alpha'((a_i)_I) = \alpha'(\sum_{sop}(\overline{a_i})) = \sum_{sop}\alpha'(\overline{a_i}) = \sum_{sop}\alpha(\overline{a_i}) = \sum_{sop}\alpha_i(a_i) = \alpha((a_i)_I)$. Por lo tanto $\alpha' = \alpha$. □

Proposición 5.1.5. *Sea* $\{A_i\}_I$ *una familia de R-módulos. Entonces se tiene que* $\coprod_I A_i = \bigoplus_I \widehat{A_i}$ *con* $A_i \cong \widehat{A_i}$.

Demostración. Sea $\{A_i\}_I$ una familia de R-módulos. Consideremos $\coprod\{A_i\}_I$ con los morfismos $\eta : A_i \to \coprod\{A_i\}_I$ tal que $\eta(a_i) = (\overline{a_i})_I$. Definimos $\widehat{A_i} := \{(\overline{a_i})_I | a_i \in A_i\} = \eta(A_i)$. Como η_i es inyectiva, $A_i \cong \widehat{A_i}$. Notemos que cada $(a_i)_I \in \coprod\{A_i\}_I$ es de la forma $\sum_{i \in sop(a_i)}(\overline{a_i})$ así que $(a_i)_I \in \sum_{i\in sop(a_i)} \widehat{A_i} \subseteq \sum_I \widehat{A_i}$. Por lo tanto $\coprod A_i \subseteq \sum_I \widehat{A_i}$. Ahora, como cada $\widehat{A_i} \leq \coprod\{A_i\}$, $\sum_I \widehat{A_i} \subseteq \coprod\{A_i\}$. Por lo tanto $\sum \widehat{A} = \coprod_I A_i$. Además, si $(a_i)_I \in \widehat{A_j} \cap \sum_{i\neq j} \widehat{A_i}$, entonces $a_k = 0$ para toda $k \neq j$ y tambien $a_j = 0$ ya que $(a_i)_I \in \sum_{i\neq j} \widehat{A_i}$. Así que $(a_i)_I = (0)$. Por lo tanto $\coprod_I A_i = \bigoplus_I \widehat{A_i}$. $\square$

En general se usa la notación $\bigoplus_I M_i$ para el coproducto de la familia $\{M_i\}_I$. Si todo los módulos M_i son iguales a un módulo M se usa la notación $M^{(I)}$ para el coproducto y M^I para el producto.

Observación 5.1.6. Sean $\{A_i\}_I$ y $\{B_i\}_I$ dos familias de R-módulos y $\{\alpha_i : A_i \to B_i\}_I$ una familia de R-morfismos. Entonces por las propiedades universales del producto y el coproducto (4.3.1) tenemos los morfismos:

$$\begin{array}{ll} \prod \alpha_i : & \prod_I A_i \longrightarrow \prod_I B_i \\ & (a_i)_I \longmapsto (\alpha(a_i))_I \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \bigoplus \alpha_i : & \bigoplus_I A_i \longrightarrow \bigoplus_I B_i \\ & (a_i)_I \longmapsto (\alpha_i(a_i))_I \end{array}$$

Fijemos un conjunto I. Sea $\mathcal{C}$ la categoría cuyos objetos son familias de R-módulos $\{M_i\}_I$ indicadas en I. Dadas dos familias $\{M_i\}_I$, $\{N_i\}_I$ un morfismo entre estos objetos es una familia de R-morfismos $\{f_i\}_I$ con $f_i : M_i \to N_i$. Entonces, por lo de arriba tenemos dos funtores

$$\bigoplus, \prod : \mathcal{C} \to R - Mod.$$

Proposición 5.1.7. *Sea* I *un conjunto. Sea* $\{0 \to A_i \overset{\alpha_i}{\to} B_i \overset{\beta_i}{\to} C_i \to 0\}_I$ *una familia de sucesiones exactas en R-Mod. Entonces las sucesiones*

$$0 \longrightarrow \prod_I A_i \xrightarrow{\prod \alpha_i} \prod_I B_i \xrightarrow{\prod \beta_i} \prod_I C_i \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \bigoplus_I A_i \xrightarrow{\bigoplus \alpha_i} \bigoplus_I B_i \xrightarrow{\bigoplus \beta_i} \bigoplus_I C_i \longrightarrow 0.$$

son exactas.

5.2. Modulos Libres

Proposición 5.2.1. *Las siguientes condiciones son equivalentes para un modulo* ${}_RF$*:*

1. F *tiene una base;*
2. $F = \bigoplus_I A_i$ *con* $A_i \cong {}_RR$ *para toda* $i \in I$.

Demostración. Notemos que *1* y *2* se satisfacen si $F = 0$ con $\emptyset$ como base e $I = \emptyset$. Por convención la suma sobre el conjunto vacio es 0. Supongamos que $F \neq 0$.

1⇒*2* Sea X una base de F y $a \in X$. Consideremos el R-morfismo $\varphi : R \to Ra$ dado por $\varphi(r) = ra$. Claramente φ es un epimorfismo, y por la propiedad de base $ra = 0$ implica $r = 0$. Por lo tanto φ es un isomorfismo. Como X es una base, X es un congunto generador, es decir, $F = \sum_{a\in X} Ra$. Tomemos $a_0 \in X$ y $c \in Ra_0 \cap \sum_{a\neq a_0} Ra$. Entonces existen distintos $a_1, ..., a_n \in X$ con $a_i \neq a_0$ y $r_0, r_1, ..., r_n \in R$ tales que $c = r_0a_0 = \sum_{i=1}^n r_ia_i$. Así $r_0a_0 + \sum(-r_i)a_i = 0$. Como X es base, $r_0 = r_1 = ... = r_n = 0$. Entonces $Ra_0 \cap \sum Ra = 0$ y por lo tanto $F = \bigoplus_{a\in X} Ra$.

2⇒*1* Por hipótesis existe un isomorfismo $\varphi_i : R \to A_i$ para cada $i \in I$. Sea $B = \{\varphi_i(1) \mid i \in I\}$. Entonces $A_i = \varphi_i(R) = \varphi_i(R1) = R\varphi_i(1)$. Así que $F = \bigoplus_I A_i = \bigoplus_I R\varphi_i(1)$ y por lo tanto B genera. Ahora, tomemos una suma finita tal que $\sum r_i\varphi_i(1) = 0$. Como $F = \bigoplus A_i$, todo elemento de F se escribe de manera única, así que $r_i\varphi_i(1) = \varphi_i(r_i) = 0$. Esto implica que $r_i = 0$ para todo i. Por lo tanto B es una base de F. □

Definición 5.2.2. Un módulo ${}_RF$ es llamado modulo *libre* si satisface las condiciones de la Proposición 5.2.1.

Lema 5.2.3. *Sea I un conjunto. Entonces $R^{(I)}$ es un modulo libre con una base de tamaño el cardinal de I.*

Demostración. Consideremos la familia $\{A_i \mid i \in I\}$ con $A_i = R$ para toda i. Entonces $R^{(I)} = \coprod\{A_i\}_I = \bigoplus\{\widehat{A_i}\}_I$con $R = A_i \cong \widehat{A_i}$. Por lo tanto $R^{(I)}$ es un modulo libre y tiene al conjunto $\{\eta_i(1) \mid i \in I\}$ como base, donde η_i son las inclusiones canónicas. □

Corolario 5.2.4. *Todo modulo M es imagen epimorfica de un módulo libre. Si M es f.g. entonces M es imagen epimorfica de un modulo libre con base finita.*

Demostración. Sea Y un conjunto generador de M. Consideremos el modulo libre $R^{(Y)}$. Definimos el R-morfismo $\varphi : R^{(Y)} \to M$ como $\varphi(\eta_y(1)) = y$. Claramente φ es suprayectivo. □

Teorema 5.2.5. *Si $\varphi : A \to F$ es un epimorfismo y F es libre entonces φ se escinde.*

Demostración. Sea X una base de F y para cada $b \in X$ sean $a_b \in A$ los elementos tales que $\varphi(a_b) = b$. Definimos $\varphi' : F \to A$ como $\varphi'(\sum r_bb) = \sum r_ba_b$. Entonces, $\varphi\varphi'(\sum r_bb) = \varphi(\sum r_ba_b) = \sum r_b\varphi(a_b) = \sum r_bb$, i.e., $\varphi\varphi' = Id_F$. Por lo tanto $A = \operatorname{Im}\varphi' \oplus \operatorname{Ker}\varphi$ por el Corolario 3.2.11.*3*. □

En general no es cierto que submódulos de libres sean libres. Considere el anillo del Ejemplo 1.0.8.2 y el ideal $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{R} \end{pmatrix}$ que es simple. Entonces este ideal no puede ser libre.

Proposición 5.2.6. *Sea R un dominio de ideales principales. Entonces todo submodulo de un módulo libre es libre.*

Demostración. Sea F un R-módulo libre y $H \leq F$. Entonces F es de la forma $\bigoplus_K Rx_k$ con $Rx_k \cong R$. Supongamos que K esta bien ordenado. Para cada $k \in K$ definimos $F_k = \bigoplus_{j \leq k} Rx_j$ y $\overline{F_k} = \bigoplus_{j<k} Rx_j$. Sea $H_k = H \cap F_k$ y $\overline{H_k} = H \cap \overline{F_k}$. Entonces $\bigcup_K F_k = F$ y $\bigcup_K H_k = H$ y además $\overline{H_k} = H \cap \overline{F_k} = H_k \cap \overline{F_k}$. Así

$$H_k/\overline{H_k} = H_k/(H_k \cap \overline{F_k}) \cong (\overline{F_k} + H_k)/\overline{F_k} \leq F_k/\overline{F_k} \cong Rx_k \cong R.$$

Esto implica que $H_k/\overline{H_k}$ es isomorfo a un ideal de R. Como R es un DIP, $H_k/\overline{H_k} \cong Rh_k$ con $h_k \in R$. Como R es dominio entero, todo ideal de R es isomorfo a R, así que $H_k/\overline{H_k}$ es libre. Por Teorema 5.2.5, la proyección canónica $\pi : H_k \to H_k/\overline{H_k}$ se escinde. Por lo tanto

$$H_k = \overline{H_k} \oplus H_k/\overline{H_k} \cong \overline{H_k} \oplus Rh_k.$$

Afirmamos que $\{h_k\}_K$ es base de H. Como $F = \bigcup_K F_k$, para $h \in H$ existe $k \in K$ tal que $h \in F_k$. Sea $\mu(h)$ el menor indice l tal que $h \in F_l$ y sea H^* el subgrupo generado por $\{h_k\}_K$. Supongamos que H^* está contenido propiamente en H. Sea j el menor índice en el conjunto $\{\mu(h) \mid h \in H \; h \notin H^*\}$ y sea h' tal que $\mu(h') = j$. Entonces $h' \in F_j \cap H = H_j$, así que $h' = a + rh_j$ para algún $a \in \overline{H_k}$, $r \in R$ y $a \in H$ pero $a \notin H^*$. Como $a \in \overline{H_j} = H \cap \overline{F_j}$ entonces $a \in \overline{F_j}$, lo que implica que $a \in F_t$ para $t < j$. Por lo tanto $\mu(a) < j$ lo que es una contradicción. Así $H = H^*$. Ahora, si $m_1 h_{k_1} + ... + m_n h_{k_n} = 0$ con $k_1 < ... < k_n$ y $m_n \neq 0$, entonces $m_n h_{k_n} \neq 0$ pero $m_n h_{k_n} \in Rh_{k_n} \cap \overline{H_{k_n}} = \{0\}$. Por lo tanto $\{h_k\}_K$ es base de H. $\square$

Dejamos como ejercicio el siguiente recíproco parcial de la Proposición anterior

Proposición 5.2.7. *Sea R un anillo conmutativo. Si todo ideal de R es libre entonces R es un DIP.*

5.3. Grupos Divisibles

Definición 5.3.1. Decimos que un grupo abeliano A es *divisible* si $zA = A$ para todo $0 \neq z \in \mathbb{Z}$.

Proposición 5.3.2. *La clase de los grupos divisibles es cerrada bajo imagenes homomorficas, bajo sumas directas y bajo productos.*

Demostración. Supongamos que ${}_{\mathbb{Z}}D$ es divisible y $\varphi : D \to G$ es un homomorfismo. Entonces $z \operatorname{Im} \varphi = z\varphi(D) = \varphi(zD) = \varphi(D) = \operatorname{Im} \varphi$ para todo $0 \neq z \in \mathbb{Z}$. En particular las copias isomorfas de un divisible son divisibles.

Ahora, si $\{D_i\}_I$ es una familia de grupos divisibles entonces $z \prod_I D_i = \prod_I zD_i = \prod_I D_i$. De la misma forma $z \bigoplus_I D_i = \bigoplus_I zD_i = \bigoplus_I D_i$. $\square$

Teorema 5.3.3. *Todo grupo abeliano se inyecta en un grupo divisible.*

Demostración. Sea A un grupo abeliano. Sabemos que existe un grupo abeliano libre ${}_{\mathbb{Z}}F$ y un epimorfismo $\varphi : F \to A$ Corolario 5.2.4. Entonces $F \cong \mathbb{Z}^{(I)}$ p.a. conjunto I. Consideremos ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ que es divisible y como $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$, tenemos un monomorfismo $i : \mathbb{Z}^{(I)} \hookrightarrow \mathbb{Q}^{(I)}$. Entonces hay un monomorfismo $\mathbb{Z}^{(I)}/\operatorname{Ker}\varphi \hookrightarrow \mathbb{Q}^{(I)}/i(\operatorname{Ker}\varphi)$ donde $\mathbb{Q}^{(I)}/i(\operatorname{Ker}\varphi)$ es divisible. Por lo tanto A se sumerje en un divisible. □

Definición 5.3.4. Sea M un módulo y $N \leq M$. Un *pseudocomplemento* (p.c.) de N en M es un submodulo $L \leq M$ que es máximo con la propiedad de $N \cap L = 0$.

Proposición 5.3.5. *Sea M un modulo y $N \leq M$. Entonces N tiene pseudocomplementos en M.*

Demostración. Sea $\mathbb{A} = \{L \leq M \mid L \cap N = 0\}$, $\mathbb{A} \neq \emptyset$ ya que $\{0\} \in \mathbb{A}$, además $(\mathbb{A}, \subseteq)$ es un COPO. Si $\mathcal{C}$ es una cadena en $\mathbb{A}$, entonces $\bigcup \mathcal{C}$ es una cota superior de $\mathcal{C}$. Sea $x \in N \cap \bigcup \mathcal{C}$. Entonces $x \in N$ y existe $L \in \mathcal{C}$ tal que $x \in L$ lo que implica que $x \in N \cap L = 0$. Así que $x = 0$. Por lo tanto $\bigcup \mathcal{C} \in \mathbb{A}$. Por el Lema de Zorn $\mathbb{A}$ tiene máximos. □

Definición 5.3.6. Sea $N \leq M$. Decimos que N es *esencial* en M ($N \leq_e M$) si siempre que $N \cap L = 0$ con $L \leq M$ se tiene que $L = 0$, equivalentemente si $0 \neq L \leq M$ entonces $N \cap L \neq 0$.

En la primer sección del siguiente capítulo se volvera a abordar este concepto y se tratará con más profundidad. Lo adelantamos ya que es fundamental para la prueba del teorema principal de esta sección.

Ejemplo 5.3.7. En $\mathbb{Z}$ si $n.m \neq 0$ entonces $\mathbb{Z}m \cap \mathbb{Z}n = \mathbb{Z}[m;n] \neq 0$ donde $[m;n]$ denota el mínimo común multiplo. Por lo tanto todo $0 \neq \mathbb{Z}n$ es esencial en $\mathbb{Z}$.

Proposición 5.3.8. *Son equivalentes para $N \leq M$:*

(a) $N \leq_e M$

(b) $\forall 0 \neq m \in M$ $\exists r \in R$ *tal que* $0 \neq rm \in N$

Demostración. (a)⇒(b) Sea $0 \neq m \in M$. Entonces $0 \neq Rm \leq M$. Como N es esencial, $Rm \cap N \neq 0$ así que existe $r \in R$ tal que $0 \neq rm \in N$.

(b)⇒(a) Sea $0 \neq L \leq M$ y $0 \neq l \in L$. Por hipótesis existe $r \in R$ tal que $0 \neq rl \in N$. Entonces $rl \in N \cap L$ y por lo tanto $N \leq_e M$. □

Proposición 5.3.9. *Sea M un modulo y $N \leq M$. Si U es un p.c. de N en M entonces $N \oplus U \leq_e M$*

Demostración. Sea $L \leq M$ tal que $(N \oplus U) \cap L = 0$. En particular $N \cap L = 0$ y $L \cap U = 0$. Tomemos $n \in N \cap (U \oplus L)$. Entonces $n = u + l$ con $u \in U$ y $l \in L$. Así $l = n - u$ lo que implica que $l = 0$. Entonces $n = u$, es decir, $n \in U \cap N$. Por lo tanto $n = 0$. Por la maximalidad de U, $U + L = U$. Entonces $L = 0$ y por lo tanto $U \oplus N \leq_e M$. □

Teorema 5.3.10. *Si $\varphi : {}_{\mathbb{Z}}D \to {}_{\mathbb{Z}}B$ es un monomorfismo con ${}_{\mathbb{Z}}D$ divisible, entonces φ se escinde.*

Demostración. Sabemos que toda copia isomorfa de un divisible es divisible, asi que podemos suponer que $D \leq B$. Veamos que D es un sumando directo de B. Sea $U \leq B$ un p.c. de D en B. Entonces $D \oplus U \leq_e B$. Sea $0 \neq b \in B$. Consideremos el ideal $(D+U : b) = \{t \in \mathbb{Z} \mid tb \in D+U\} \leq \mathbb{Z}$. Entonces $(D+U : b) = \mathbb{Z}z_0$ p.a. $z_0 \in \mathbb{Z}$. Por la Proposición 5.3.8, $(D+U : b) \neq 0$ y por lo tanto $z_0 \neq 0$. Tomemos $d \in D$ y $u \in U$ tales que $z_0 b = d+u$. Como D es divisible, $d = z_0 d'$ con $d' \in D$ así que $z_0(b-d') = u$. Notemos que $(D+U : b) = \{t \in \mathbb{Z} \mid t(b-d') \in D+U\}$ ya que si $zb = d_1 + u_1$ entonces $z(b-d') = zb - zd' = d_1 + u_1 - zd' \in D+U$, ahora si $z(b-d') = d+u$ entonces $zb = d+u+zd' \in D+U$. Afirmamos que $(U + \mathbb{Z}(b-d')) \cap D = 0$. Supongamos que $d_1 = u_1 + z(b-d')$ $d_1 \in D$ $u_1 \in U$ y $z \in \mathbb{Z}$. Entonces $z(b-d') \in D+U$ y por lo tanto $z \in (D+U : b) = \mathbb{Z}z_0$. Así que $z(b-d') = z_1 z_0(b-d') = d_1 - u_1$. Como $u = z_0(b-d')$, $z_1 u = d_1 - u_1$, así que $d_1 = u_1 + z_1 u$, lo que implica que $d_1 = 0$. Por la máximalidad de U, $U + \mathbb{Z}(b-d') = U$ y así $\mathbb{Z}(b-d') \subseteq U$. En particular $b - d' \in U$ y entonces $b \in U + D$. Por lo tanto $D \oplus U = B$. $\square$

5.4. Dimensión Uniforme

Definición 5.4.1. Un módulo no cero U es uniforme si todos sus submódulos son esenciales.

Ejemplo 5.4.2. 1. Todo módulo simple es uniforme.

2. Los grupos abelianos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ con p un número primo son uniformes.

3. Submódulos de uniformes son uniformes.

Capítulo 6

Modulos Proyectivos e Inyectivos

6.1. Módulos esenciales y superfluos

En la sección final del capítulo anterior se introdujo el concepto de submódulo esencial. Esta definición tiene su dual, los cuales se llaman submódulos superfluos

Definición 6.1.1. Un submódulo $N \leq M$ es *superfluo* en M $(N << M)$ si siempre que $N + L = M$ con $L \leq M$, se tiene que $L = M$.

Ejemplo 6.1.2.

1. En ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ si $(\mathbb{Z}q_1 + ... + \mathbb{Z}q_n) + U = \mathbb{Q}$ entonces $\{q_1, ..., q_n\} \cup U$ es un generador de $\mathbb{Q}$. Por el ejemplo 2.1.25 U es generador, así que $U = \mathbb{Q}$. Por lo tanto todo submódulo f.g. de $\mathbb{Q}$ es superfluo.

2. Sea $p \in \mathbb{Z}$ un número primo y consideremos el siguiente subgrupo de ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$:
$$\mathbb{Z}_{(p)} = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid p \nmid b \right\}.$$
Entonces $\mathbb{Z}_{(p)}$ tiene un único submódulo máximo $p\mathbb{Z}_{(p)}$. Esto implica que todo submódulo de $\mathbb{Z}_{(p)}$ es superfluo.

Definición 6.1.3. Un R-morfismo $\alpha : A \to B$ se llama:

1. *superfluo* si $\operatorname{Ker} \alpha << A$
2. *esencial* si $\operatorname{Im} \alpha \leq_e B$

Lema 6.1.4.

1. *Si $A \leq B \leq M \leq N$ y $B << M$ entonces $A << N$.*
2. *Si $\{A_i\}_{i=1}^n$ con $A_i << M$ entonces $\sum_{i=1}^n A_i << M$.*
3. *Si $A << M$ y $\varphi \in \operatorname{Hom}_R(M, N)$ entonces $\varphi(A) << N$.*
4. *Si $\alpha : A \to B$ y $\beta : B \to C$ son epimorfismos superfluos entonces $\beta\alpha$ también lo es.*

Demostración. *1.* Supongamos que $A+U=N$ con $U\leq N$. Entonces $B+U=N$. Así $M=N\cap M=M\cap(B+U)$, como $B\leq M$, $M\cap(B+U)=B+(M\cap U)$. Por hipótesis $B<<M$ así que $M\cap U=M$ lo que implica que $M\subseteq U$ pero $A\subseteq M\subseteq U$. Por lo tanto $A+U=U=N$, i.e, $A<<N$.

2. Por inducción. Si $n=1$, se tiene el resultado por hipótesis. Supongamos que la afirmación es valida para $n>1$ y que $A_1+...+A_{n-1}<<M$. Si $(A_1+...+A_{n-1}+A_n)+U=M$ con $U\leq M$ entonces $(A_1+...A_{n-1})+(A_n+U)=M$. Por hipótesis de inducción, $A_n+U=M$ y como $A_n<<M$ entonces $U=M$.

3. Sea $U\leq M$ tal que $\varphi(A)+U=N$. Dado $m\in M$ se tiene que $\varphi(m)=\varphi(a)+u$ con $a\in A$ y $u\in U$. Entonces $u=\varphi(m-a)$, por lo tanto $m-a\in\varphi^{-1}(U)$. Esto implica que $m\in\varphi^{-1}(U)+A$. Por lo tanto $M=\varphi^{-1}(U)+A$. Como $A<<M$, $\varphi^{-1}(U)=M$ lo que implica que $\varphi(M)=\varphi\varphi^{-1}(U)=U\cap\operatorname{Im}\varphi$, así que $\varphi(A)\subseteq U$. Entonces $N=\varphi(A)+U=U$ y por lo tanto $\varphi(A)<<N$.

4. Supongamos que $\operatorname{Ker}\beta\alpha+U=A$, con $U\leq A$. Entonces

$$\alpha(\operatorname{Ker}\beta\alpha+U)=\alpha(A)=B.$$

Por otro lado $\alpha(\operatorname{Ker}\beta\alpha+U)=\alpha(\operatorname{Ker}\beta\alpha)+\alpha(U)=\alpha(\alpha^{-1}(\operatorname{Ker}\beta))+\alpha(U)=\operatorname{Ker}\beta+\alpha(U)$ así que $B=\operatorname{Ker}\beta+\alpha(U)$ pero $\operatorname{Ker}\beta<<B$ entonces $B=\alpha(U)$. Por lo tanto $\operatorname{Ker}\alpha+U=A$ ya que si $a\in A$ entonces $\alpha(a)\in B=\alpha(U)$ y así $\alpha(a)=\alpha(u)$ p.a. $u\in U$. Esto implica que $a-u\in\operatorname{Ker}\alpha$ y entonces $a=u+(a-u)$. Como $\operatorname{Ker}\alpha<<A$, $U=A$. Por lo tanto $\operatorname{Ker}\alpha\beta<<A$. □

Lema 6.1.5. 1. *Si $A\leq B\leq M\leq N$ y $A\leq_e N$ entonces $B\leq_e M$.*

2. *Si $\{A_i\}_{i=1}^n$ con $A_i\leq_e M$ entonces $\bigcap_{i=1}^n A_i\leq_e M$*

3. *Si $B\leq_e N$ y $\varphi:M\to N$ entonces $\varphi^{-1}(B)\leq_e M$.*

4. *Si $\alpha:A\to B$ y $\beta:B\to C$ son monomorfismos esenciales entonces $\beta\alpha$ tambien lo es.*

Demostración. *1.* Si $U\leq M$ y $B\cap U=0$ entonces $A\cap U=0$. Como $U\leq M\leq N$ y $A\leq_e N$ entonces $U=0$.

2. Por inducción. Si $n=1$ es claro. Supongamos que vale para $n>1$ i.e., $\bigcap_{i=1}^{n-1}A_i\leq_e M$. Sea $U\leq M$ tal que $(\bigcap_{i=1}^n A_i)\cap U=0$. Así $0=(\bigcap_{i=1}^{n-1}A_i\cap A_n)\cap U$. Por hipótesis de inducción se tiene que $A_n\cap U=0$, pero $A_n\leq_e M$. Por lo tanto $U=0$.

3. Sea $U\leq M$ tal que $\varphi^{-1}(B)\cap U=0$. Si $\varphi(U)\cap B\neq 0$ entonces existe $b\in B$ tal que $b=\varphi(u)$ p.a. $0\neq u\in U$. Así $u\in\varphi^{-1}(B)\cap U=0$. Por lo tanto $\varphi(B)\cap U=0$. Como $B\leq_e N$, $\varphi(U)=0$ lo que implica que $U\subseteq\operatorname{Ker}\varphi\subseteq\varphi^{-1}(0)\subseteq\varphi^{-1}(B)$. Así $U=\varphi^{-1}(B)\cap U=0$ y por lo tanto $\varphi^{-1}(B)\leq_e M$.

4. Sea $U\leq C$ tal que $\operatorname{Im}\beta\alpha\cap U=0$. Como β es mono entonces $0=\beta^{-1}(0)=\beta^{-1}(\operatorname{Im}\beta\alpha\cap U)=\beta^{-1}(\operatorname{Im}\beta\alpha)\cap\beta^{-1}(U)$, pero $\operatorname{Im}\beta\alpha=\beta(\operatorname{Im}\alpha)$ así que

$$0=\beta^{-1}(\operatorname{Im}\beta\alpha)\cap\beta^{-1}(U)=\beta^{-1}(\beta(\operatorname{Im}\alpha))\cap\beta^{-1}(U)=\operatorname{Im}\alpha\cap\beta^{-1}(U).$$

Como $\operatorname{Im}\alpha\leq_e B$, $\beta^{-1}(U)=0$. Entonces $\operatorname{Im}\beta\cap U=0$ y como $\operatorname{Im}\beta\leq_e C$, $U=0$. Por lo tanto $\operatorname{Im}\beta\alpha\leq_e C$. □

Lema 6.1.6. *Sea M un modulo. Para todo $a\in M$ se tiene que Ra no es superfluo en M si y solo si existe $C\leq M$ máximo tal que $a\notin C$.*

Demostración. $\Rightarrow\rfloor$ Supongamos que Ra no es superfluo en M. Sea $\Gamma = \{N < M \mid N + Ra = M\}$. Como Ra no es superfluo en M, $\Gamma \neq \emptyset$. Sea $\mathcal{C}$ una cadena en Γ, entonces $\bigcup \mathcal{C} \in \Gamma$ ya que para cada $N \in \mathcal{C}$, $a \notin N$ porque en caso contrario $Ra \leq N$ y $N + Ra = M$ lo que implica que $N = M$, contradiciendo que N era propio en M. Así, $a \notin \bigcup \mathcal{C}$, y claramente $\bigcup \mathcal{C} + Ra = M$. Entonces, por el lema de Zorn, Γ tiene máximos. Sea C un máximo en Γ entonces $a \notin C$. Si $C < U \leq M$ entonces $U \notin \Gamma$. Como $C + Ra = M$, $U + Ra = M$ así que $U = M$. Por lo tanto C es máximo en M.

$\Leftarrow\rfloor$ Si existe $C < M$ máximo tal que $a \notin C$ entonces $C + Ra = M$. Como C es propio en M, Ra no es superfluo en M. $\square$

Proposición 6.1.7. *Supongamos que $M = \sum_I M_i$ con $M_i \leq M$. Si $A_i \leq_e M_i$ y $\sum_I A_i = \bigoplus_I A_i$, entonces $\bigoplus_I A_i \leq_e M$ y $\sum_I M_i = \bigoplus_I M_i$.*

Demostración. Para cada $m \in M$ tenemos que $m = m_{i_1} + .. + m_{i_k}$ con $m_{ij} \in M_{ij}$. Hagamos el caso para dos submódulos, es decir, supongamos que $m = m_1 + m_2$ con $0 \neq m_1 \in M_1$ $0 \neq m_2 \in M_2$ y que $A_1 \leq_e M_1$ $A_2 \leq_e M_2$ y $A_1 + A_2 = A_1 \oplus A_2$. Entonces existe $0 \neq r \in R$ tal que $0 \neq rm_1 \in A_1$ por la Proposición 5.3.8. Si $rm_2 = 0$, entonces $rm = rm_1$ y así $rm \in A_1 \oplus A_2$. Si $rm_2 \neq 0$ entonces existe $s \in R$ tal que $0 \neq srm_2 \in A_2$. Por lo tanto $srm = srm_1 + srm_2 \in A_1 \oplus A_2$. Lo que implica que $A_1 \oplus A_2 \leq_e M$. Para el caso general, como cada $m \in M$ se escribe como una suma finita, por inducción tenemos que $\bigoplus_I A_i \leq_e M$. Ahora, supongamos que $m_i = m_1 + ... + m_{i-1}$ con $m_j \in M_j$. Entonces existe $0 \neq r \in R$ tal que $0 \neq r(m_1 + \cdots + m_{i-1}) \in A_1 + \cdots + A_{i-1}$. Así $rm_i \in M_i \cap (A_1 \oplus \cdots \oplus A_{i-1})$. Entonces, existe $0 \neq s \in R$ tal que $0 \neq srm_i \in A_i$ lo que implica que $srm_i \in A_i \cap A_1 \oplus \cdots \oplus A_{i-i}$. Así $srm_i = 0$ que es una contradicción. Por lo tanto $m_i = 0$. Esto implica que $\sum_I M_i = \bigoplus_I M_i$. $\square$

Corolario 6.1.8. *Si $M = \bigoplus_I M_i$ con $A_i \leq_e M_i \leq M$, entonces $\sum_I A_i = \bigoplus_I A_i$ y $\bigoplus_I A_i \leq_e M$.*

Demostración. Como $\sum_I M_i = \bigoplus_I M_i$ y $A_i \leq M_i$ entonces $\sum_I A_i = \bigoplus_I A_i$ por lo que estamos en las hipótesis de la Proposición 6.1.7. Por lo tanto $\bigoplus_I A_i \leq_e M$. $\square$

Corolario 6.1.9. *Sea $M = \bigoplus_I M_i$ y $B \leq M$. Son equivalentes:*

(a) $B \cap M_i \leq_e M_i$ *para cada* $i \in I$;

(b) $\bigoplus_I (B \cap M_i) \leq_e M$;

(c) $B \leq_e M$

Demostración. (a)$\Rightarrow$(b). Se tiene por el Corolario 6.1.9.

(b)$\Rightarrow$(c). Para cada $i \in I$, $B \cap M_i \subseteq B$ así que $\bigoplus (B \cap M_i) \subseteq B \subseteq M$. Por lo tanto $B \leq_e M$.

(c)$\Rightarrow$(a). Tomemos $0 \neq m_i \in M_i$, entonces existe $0 \neq r \in R$ tal que $0 \neq rm_i \in B$ y así $rm_i \in B \cap M_i$. Por lo tanto $B \cap M_i \leq_e M$. $\square$

Observación 6.1.10. Dados $L, N \leq M$ tales que $N \cap L = 0$ entonces, siguiendo la prueba de la Proposición 5.3.5, se puede ver que N tiene pseudocomplementos en M que contienen a L.

Definición 6.1.11. Sean $L, N \leq M$. Decimos que L es *extensión esencial* de N si $N \leq_e L$. Si L es máximo con esta propiedad entonces L es una *extensión esencial máxima.*

Proposición 6.1.12. *Si $N \leq M$ y U un p.c. de N en M y V un p.c. de U en M que incluye a N, entonces $N \leq_e V$ y es extensión esencial máxima.*

Demostración. Sea $L \leq V$ tal que $L \cap N = 0$. Entonces

$$N \cap (U + L) = (N \cap V) \cap (U + L) = N \cap (V \cap (U + L))$$

Como $L \subseteq V$, por la ley modular $N \cap (V \cap (U + L)) = N \cap (L + (V \cap U)) = N \cap L = 0$. Por hipótesis, U es máximo tal que $U \cap N = 0$ así que $U + L = U$ lo que implica $L \subseteq U$. Como $L \subseteq V$ y $U \cap V = 0$ se tiene que $L = 0$. Por lo tanto $N \leq_e V$. Además, si $V' \leq M$ es tal que $V \subseteq V'$, la maximidad de V se tiene que $V' \cap U \neq 0$, pero $(V' \cap U) \cap N = V' \cap (U \cap N) = 0$. Por lo tanto N no es esencial en V'. □

Observación 6.1.13. Sea $N \leq M$. Si U es un p.c. de N en M, V un p.c. de U en M que incluye a N y W es un p.c. de V que incluye a U entonces $W = U$.

Definición 6.1.14. Un submódulo $N \leq M$ se llama *esencialmente cerrado* (o simplemente *cerrado*) en M si no tiene extenciones esenciales distintas de N en M.

Teorema 6.1.15. *La colección de los submódulos de M que son p.c. en M son exactamente los submódulos cerrados de M.*

Demostración. Si N es un p.c. en M entonces existe $L \leq M$ tal que N es p.c. de L en M. Supongamos que $N \leq_e N'$. Por ser N p.c., se tiene que $N' \cap L \neq 0$. Como $N \leq_e N'$, $0 \neq N \cap (L \cap N')$. Lo que implica que $0 \neq N \cap L$. Esto es una contradicción y por lo tanto N es cerrado. Recíprocamente si N no tiene extenciones esenciales distintas de N dentro de M, entonces N es un p.c. de un p.c. de él. □

Proposición 6.1.16. *Sean $A, B \leq M$ tales que $A \cap B = 0$. Entonces B es un p.c. de A en M si y sólo si $(A + B)/B \leq_e M/B$.*

Demostración. $\Rightarrow$. Supongamos que $((A + B)/B) \cap (U/B) = 0$. Entonces $(A + B) \cap U = B$ pero $(A + B) \cap U = B + (A \cap U)$ por lo tanto $(A \cap U) \subseteq B$, lo que implica que $A \cap U \subseteq A \cap B = 0$ y así $A \cap U = 0$ pero B es p.c. de A en M entonces $B = U$. Por lo tanto $U/B = 0$ lo que implica que $(A+B)/B \leq_e M/B$.

$\Leftarrow$. Supongamos que $B \leq U \leq M$ tal que $A \cap U = 0$

Si $x \in (A + B) \cap U$ entonces $x = a + b$ con $a \in A$, $b \in B$ y $x \in U$ asi que $a = x - b \in A \cap U$ lo que implica que $a = 0$ y por lo tanto $x \in B$. Entonces $(A + B) \cap U \subseteq B$ así que $(A + B) \cap U = B$, i.e. $((A + B)/B) \cap (U/B) = 0$ pero como $(A+B)/B \leq_e M/B$ entonces $U = B$. Por lo tanto B es p.c. de A en M. □

6.2. Producto Fibrado y Coproducto Fibrado en R-Mod

Para esta sección, consideremos los siguientes ángulos en R-Mod.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi"'] & B \\
M &
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
& B \arrow[d, "\beta"] \\
M \arrow[r, "\psi"'] & N
\end{tikzcd}
$$

Teorema 6.2.1. *1. Tomemos el angulo (φ, α). Sea $N = (M \oplus B)/U$ con $U := \{(\varphi(a), -\alpha(a)) \mid a \in A\}$ y sean $\psi : M \to N$ y $\beta : B \to N$ definidos como $\psi(m) = (m, 0) + U$ y $\beta(b) = (0, b) + U$ respectivamente. Entonces (ψ, β) es el coproducto fibrado de (φ, α).*

2. Tomemos el angulo (ψ, β). Sea $A := \{(m, b) \mid m \in M\ b \in B$ y $\psi(m) = \beta(b)\}$ y sean $\varphi : A \to M$ y $\alpha : A \to B$ definidos como $\varphi(m, b) = m$ y $\alpha(m, b) = b$ respectivamente. Entonces (φ, α) es el producto fibrado de (ψ, β).

Demostración. 1. Denotemos $\overline{(m,b)}$ a la clase $(m, b) + U$ en N. Es claro que U es submódulo de $M \oplus B$ y que ψ y β son R-morfismos. Ahora $\psi\varphi(a) = \overline{(\varphi(a), 0)}$ y $\beta\alpha(a) = \overline{(0, \alpha(a))}$. Como $(\varphi(a), 0) - (0, \alpha(a)) = (\varphi(a), -\alpha(a)) \in U$, se tiene que $\psi\varphi = \beta\alpha$.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi"'] & B \arrow[d, "\beta"] \arrow[ddr, "\beta'"] & \\
M \arrow[r, "\psi"] \arrow[drr, "\psi'"'] & N \arrow[dr, dashed, "\sigma"] & \\
& & X
\end{tikzcd}
$$

Sea X un módulo y $\psi' : M \to X$ y $\beta' : B \to X$ morfismos tales que $\beta'\alpha = \psi'\varphi$. Definimos $\sigma : N \to X$ como $\sigma(\overline{(m,b)}) = \psi'(m) + \beta'(b)$. Notemos que $\sigma(\overline{(\varphi(a), -\alpha(a))}) = \psi'\varphi(a) - \beta'\alpha(a) = 0$ ya que $\psi'\varphi = \beta'\alpha$. Por lo tanto σ está bien definida. Por otro lado, $\sigma\psi(m) = \sigma(\overline{(m,0)}) = \psi'(m) + \beta'(0) = \psi'(m)$ y $\sigma\beta(b) = \sigma(\overline{(0,b)}) = \psi'(0) + \beta'(b) = \beta'(b)$, i.e. $\sigma\psi = \psi'$ y $\sigma\beta = \beta'$.

Supongamos que tenemos $\sigma' : N \to X$ tal que $\psi' = \sigma'\psi$ y $\beta' = \sigma'\beta$. Entonces $(\sigma - \sigma')\psi = 0$ y $(\sigma - \sigma')\beta = 0$. Así que $0 = (\sigma - \sigma')\psi(m) = (\sigma - \sigma')(\overline{(m,0)})$ y $0 = (\sigma - \sigma')\beta(b) = (\sigma - \sigma')(\overline{(0,b)})$ pero como $\{\overline{(m,0)}, \overline{(0,b)} \mid m \in M\ b \in B\}$ generan N entonces $(\sigma - \sigma') = 0$.

2. Tenemos que $A \leq M \oplus B$ y φ y α son las restricciones de las proyecciones canónicas, así que son R-morfismos.

$$
\begin{tikzcd}
Y \arrow[dr, dashed, "\tau"] \arrow[drr, "\alpha'"] \arrow[ddr, "\varphi'"'] & & \\
& A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi"] & B \arrow[d, "\beta"] \\
& M \arrow[r, "\psi"] & N
\end{tikzcd}
$$

Sea Y un R-módulo y $\varphi' : Y \to M$ y $\alpha' : Y \to B$ morfismos tales que $\beta\alpha' = \psi\varphi'$. Definimos $\tau : Y \to A$ como $\tau(y) = (\varphi'(y), \alpha'(y)) \in A$ ya que $\psi\varphi' = \beta\alpha'$.

Es claro que τ es un R-morfismo. Ahora, $\alpha\tau(y) = \alpha(\varphi'(y), \alpha'(y)) = \alpha'(y)$ y $\varphi\tau(y) = \varphi(\varphi'(y), \alpha'(y)) = \varphi'(y)$ asi que $\alpha\tau = \alpha'$ y $\varphi\tau = \varphi'$.

Supongamos que tenemos $\tau' : Y \to A$ tal que $\varphi\tau' = \varphi'$ y $\alpha\tau' = \alpha'$. Sea $(\tau-\tau')(y) = (m, b)$ entonces $0 = \varphi(\tau-\tau')(y) = \varphi(m, b) = m$ y $0 = \alpha(\tau-\tau')(y) = \alpha(m, b) = b$. Como φ ni α son los morfismos 0 entonces $(\tau - \tau')(y) = 0$, por lo tanto $(\tau - \tau') = 0$. $\square$

Teorema 6.2.2. *Sea (ψ, β) el coproducto fibrado de (φ, α). Entonces:*

1. *Si α es un monomorfismo (resp. epimorfismo), entonces ψ es monomorfismo (resp. epimorfismo).*

   Si φ es un monomorfismo (resp. epimorfismo), entonces β es monomorfismo (resp. epimorfismo).

2. *Sea α un monomorfismo. Entonces* $\operatorname{Im}\psi$ *es un sumando directo de N si y sólo si existe $\kappa : B \to M$ tal que $\varphi = \kappa\alpha$.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi"'] & B \arrow[d, "\beta"] \arrow[dl, dashed, "\kappa"'] \\ M \arrow[r, "\psi"] & N \end{tikzcd}$$

Demostración. 1. Sea α un monomorfismo y $\psi(m) = \overline{(m, 0)} = 0$, entonces existe un $a \in A$ tal que $(m, 0) = (\varphi(a), -\alpha(a))$. Así que $\alpha(a) = 0$, lo que implica que $a = 0$. Por lo tanto $m = \varphi(a) = 0$. Si φ es un monomorfismo la prueba es simétrica. El caso de los epimorfismos se sigue de la Proposición 4.4.4.

2 $\Rightarrow$. Sean α un monomorfismo y supongamos que $N = \operatorname{Im}\psi \oplus N_0$. Entonces ψ tambien es un monomorfismo, así que ψ induce un isomorfismo $\psi_0 : M \to \operatorname{Im}\psi$. Sea $\pi : N \to \operatorname{Im}\psi$ la proyección canónica. Definimos $\kappa := \psi_0^{-1}\pi\beta$. Entonces $\kappa\alpha(a) = \psi_0^{-1}\pi\beta\alpha(a) = \psi_0^{-1}\pi\psi\varphi(a) = \psi_0^{-1}\pi\overline{(\varphi(a), 0)} = \psi_0^{-1}\overline{(\varphi(a), 0)} = \varphi(a)$. Por lo tanto $\kappa\alpha = \varphi$.

$\Leftarrow$. Sea $\kappa : B \to M$ tal que $\kappa\alpha = \varphi$. Tomemos $\xi : N \to M$ como $\xi(\overline{(m, b)}) = m + \kappa(b)$. Como $\xi\overline{(\varphi(a), -\alpha(a))} = \varphi(a) - \kappa\alpha(a) = 0$, ξ está bien definido y es un R-morfismo. Se tiene que $\xi\psi(m) = \xi\overline{(m, 0)} = m$, es decir, $\xi\psi = Id_M$. Entonces por el Corolario 3.2.11.(*3*), $N = \operatorname{Im}\psi \oplus \operatorname{Ker}\xi$. $\square$

Teorema 6.2.3. *Sea (φ, α) el producto fibrado de (ψ, β). Entonces:*

1. *Si β es un epimorfismo (resp. monomorfismo), entonces φ es epimorfismo (resp. monomorfismo).*

   Si ψ es un epimorfismo (resp. monomorfismo), entonces α es epimorfismo (resp. monomorfismo).

2. *Sea ψ un epimorfismo. Entonces* $\operatorname{Ker}\alpha$ *es un sumando directo de A si y sólo si existe $\kappa : B \to M$ tal que $\beta = \psi\kappa$.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi"'] & B \arrow[d, "\beta"] \arrow[dl, dashed, "\kappa"'] \\ M \arrow[r, "\psi"] & N \end{tikzcd}$$

Demostración. 1. Sean β un epimorfismo y $m \in M$. Entonces existe $b \in B$ tal que $\beta(b) = \psi(m)$. Así que $(m,b) \in A$ y $\varphi(m,b) = m$. Por lo tanto φ es un epimorfismo. Si ψ un epimorfismo, la prueba es análoga. El caso de los monomorfismos se sigue de la Proposición 4.4.4.

2 $\Rightarrow$. Supongamos que ψ es un epimorfismo y que $A = \operatorname{Ker}\alpha \oplus A_0$. Como α también es un epimorfismo, se puede dar un morfismo $\alpha_0 : B \to A_0$ definido como $\alpha_0(b) = (m,b)$. Definimos $\kappa = \varphi\alpha_0$. Se tiene que $\psi\kappa = \beta$ ya que $\psi\kappa(b) = \psi\varphi\alpha_0(b) = \psi\varphi(m,b) = \psi(m) = \beta(m)$ porque $(m,b) \in A$.

$\Leftarrow$. Sea $\kappa : B \to M$ tal que $\psi\kappa = \beta$, entonces podemos definir $\xi : B \to A$ como $\xi(b) = (\kappa(b), b)$. Además $\alpha\xi(b) = \alpha(\kappa(b), b) = b$, es decir, $\alpha\xi = Id_B$. Por lo tanto, se tiene que $A = \operatorname{Ker}\alpha \oplus \operatorname{Im}\xi$ por el Corolario 3.2.11.(*3*). □

6.3. Módulos Inyectivos y Proyectivos

Teorema 6.3.1. *Las siguientes condiciones son equivalentes para un módulo* $_RQ$:

(a) *Todo monomorfismo* $\xi : Q \to B$ *se escinde.*

(b) *Para todo monomorfismo* $\alpha : A \to B$ *y para todo R-morfimo* $\varphi : A \to Q$ *existe un R-morfismo* $\kappa : B \to Q$ *tal que* $\varphi = \kappa\alpha$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi"'] & B \arrow[dl, dashed, "\kappa"] \\ Q & \end{tikzcd}$$

(c) *El funtor* $\operatorname{Hom}_R(\_, Q)$ *es exacto.*

Demostración. 1. (a)$\Rightarrow$(b). Sea (ψ, β) el coproducto fibrado de (α, φ). Por el Teorema 6.2.2.(*1*), ψ es un monomorfismo. Por hipótesis ψ se escinde. Así que por el Teorema 6.2.2.(*2*) existe $\kappa : B \to Q$ tal que $\varphi = \kappa\alpha$.

(b)$\Rightarrow$(c). Sea

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta corta. Apliquemos a esta sucesión el funtor $\operatorname{Hom}_R(\_, Q)$, entonces tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(C,Q) \xrightarrow{g^*} \operatorname{Hom}_R(B,Q) \xrightarrow{f^*} \operatorname{Hom}_R(A,Q).$$

Basta demostrar que f^* es suprayectiva. Sea $\varphi \in \operatorname{Hom}_R(A,Q)$. Como $f : A \to B$ es un monomorfismo, por hipótesis existe $\kappa : B \to Q$ tal que $g = \kappa f = f^*(\kappa)$.

(c)$\Rightarrow$(a). Sea $\xi : Q \to B$ un monomorfismo. Consideremos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow Q \xrightarrow{\xi} B \xrightarrow{\pi} \operatorname{Coker}\xi \longrightarrow 0.$$

Por hipótesis la sucesión

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(Coker\xi, Q) \xrightarrow{\pi^*} \operatorname{Hom}_R(B,Q) \xrightarrow{\xi^*} \operatorname{Hom}_R(Q,Q) \longrightarrow 0$$

es exacta. Entonces ξ^* es suprayectiva, por lo cual existe $\theta : B \to Q$ tal que $\xi\theta = Id_Q$. $\square$

Teorema 6.3.2. *Las siguientes condiciones son equivalentes para un módulo* ${}_RP$*:*

(a) *Todo epimorfismo* $\xi : B \to P$ *se escinde.*

(b) *Para todo epimorfismo* $\psi : B \to C$ *y para todo R-morfismo* $\beta : P \to C$ *existe un R-morfismo* $\lambda : P \to B$ *tal que* $\beta = \psi\lambda$*.*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\lambda"'] \arrow[d, "\beta"] \\ B \arrow[r, two heads, "\psi"] & C \end{tikzcd}$$

(c) *El funtor* $\mathrm{Hom}_R(P, \_)$ *es exacto.*

Demostración. (a)⇒(b). Tomemos el producto fibrado (φ, α) de (ψ, β). Por el Teorema 6.2.3.(*1*), α es un epimorfismo. Por hipotesis α se escinde, lo que implica que existe $\lambda : P \to B$ tal que $\beta = \psi\lambda$ por el Teorema 6.2.3.(*2*).

(b)⇒(c). Consideremos la suceción exacta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0.$$

Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_R(P, \_)$ obtenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P, A) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_R(P, B) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_R(P, C).$$

Basta probar que g_* es suprayectiva. Sea $\beta : P \to C$. Como g es sobre, por hipótesis existe $\lambda : P \to B$ tal que $\beta : g\lambda = g_*(\lambda)$.

(c)⇒(a). Sea $\xi : B \to P$ un epimorfismo. Consideremos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\,\xi \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\xi} P \longrightarrow 0.$$

Entonces

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P, \mathrm{Ker}\,\xi) \xrightarrow{i_*} \mathrm{Hom}_R(P, B) \xrightarrow{\xi_*} \mathrm{Hom}_R(P, P) \longrightarrow 0$$

es exacta. Por lo tanto existe $\omega : P \to B$ tal que $Id_P = \xi\omega$. $\square$

Definición 6.3.3. 1. Se dice que un módulo ${}_RQ$ es *inyectivo* si satisface las condiciones del Teorema 6.3.1.

2. Se dice que un módulo ${}_RP$ es *proyectivo* si satisface las condiciones del Teorema 6.3.2.

Proposición 6.3.4. *Sea* $P = \bigoplus_I P_i$*. Entonces* P *es proyectivo si y solo si cada* P_i *es proyectivo.*

Demostración. $\Rightarrow$. Sea $\beta : A \to B$ un epimorfismo y $\psi : P_i \to B$. Como P es proyectivo, existe $\lambda : P \to A$ tal que $\beta\lambda = \psi\pi_i$ donde $\pi_i : P \to P_i$ es la proyección canónica. Sea $\eta_i : P_i \to \bigoplus_I P_i$ la inclusión canónica. Entonces $\beta\lambda\eta_i = \psi\pi_i\sigma\eta_i = \psi Id_{P_i} = \psi$.

$$\begin{tikzcd}
 & P_i \arrow[d, "\eta_i"] \\
 & P \arrow[d, "\pi_i"] \arrow[ddl, "\lambda"'] \\
 & P_i \arrow[d, "\psi"] \\
A \arrow[r, two heads, "\beta"] & B
\end{tikzcd}$$

$\Leftarrow$. Sean $\beta : A \to B$ un epimorfismo y $\psi : P \to B$. Como P_i es proyectivo para cada $i \in I$, existen morfismos $\lambda_i : P_i \to A$ tales que $\beta\lambda_i = \psi\eta_i$ donde η_i son las inclusiones canónicas de la suma directa. Por el Teorema 5.1.4, la familia $\{\lambda_i\}$ define un único morfismo $\lambda : P \to A$ tal que $\lambda\eta_i = \lambda_i$ para todo $i \in I$. Notemos que para cada $i \in I$, $\beta\lambda\eta_i = \psi\eta_i$. Por la unicidad que da el Teorema 5.1.4 tenemos que $\beta\lambda = \psi$.

$$\begin{tikzcd}
 & P_i \arrow[d, "\eta_i"] \arrow[ddl, "\lambda_i"'] \\
 & P \arrow[d, "\psi"] \arrow[dl, dashed, "\lambda_i"] \\
A \arrow[r, two heads, "\beta"'] & B
\end{tikzcd}$$

□

Teorema 6.3.5. *Un módulo es proyectivo si y solo si es isomorfo a un sumando directo de un módulo libre.*

Demostración. $\Rightarrow$. Sea P proyectivo. Por el Corolario 5.2.4, existe F libre y un epimorfismo $\alpha : F \to P$. Como P es proyectivo, α se escinde, es decir, $F = \operatorname{Ker}\alpha \oplus K$. Pero $K \cong \operatorname{Im}\alpha = P$, por lo tanto P es isomorfo a un sumando directo de un libre.

$\Leftarrow$. Por el Teorema 5.2.5, si F es libre entonces F es proyectivo. Por lo tanto, si P es isomorfo a un sumando directo de F P es proyectivo por la Proposición 6.3.4 . □

Corolario 6.3.6. *Sea D un DIP. Entonces en D-Mod, P es proyectivo si y solo si es libre.*

Demostración. $\Rightarrow$. Sea P proyectivo. Por el Teorema 6.3.5 P es isomorfo a un sumando directo de un libre, en particular es isomorfo a un submódulo de un libre. Usando la Proposición 5.2.6, tenemos que P es libre.

$\Leftarrow$. Todo libre es proyectivo. □

Teorema 6.3.7 (de la Base Dual)**.** *Las siguientes condiciones son equivalentes para un módulo P:*

(a) *P es proyectivo.*

(b) *Para toda familia $\{y_i\}_I$ de generadores de P, existe una familia de morfismos $\varphi_i \in \operatorname{Hom}_R(P, R)$ tales que:*

 (1) *Para todo $p \in P$, $\varphi(p) \neq 0$ sólo para un número finito de índices de I.*

 (2) *Para todo $p \in P$, $p = \sum_I \varphi_i(p) y_i$*

(c) *Existe una familia $\{y_i\}_I$ de elementos de P y existe una familia $\{\varphi_i\}_I$ de elementos de $\operatorname{Hom}_R(P, R)$ que satisfacen* (1) *y* (2) *del inciso* (b)*.*

Demostración. (a)⇒(b). Tenemos que existe $F = \bigoplus_I Rx_i$ libre y un epimorfismo $\xi : \bigoplus_I Rx_i \to P$ dado por $\xi(\sum r_i x_i) = \sum r_i y_i$. Como P es proyectivo existe $\lambda : P \to \bigoplus_I Rx_i$ tal que $\xi\lambda = Id_P$. Sea $\pi_i : \bigoplus_I Rx_i \to Rx_i \cong R$ la proyección canónica. Ahora si $a \in \bigoplus_I Rx_i$, entonces $a = \sum \pi_i(a) x_i$. Así que para cada $p \in P$,

$$p = \xi\lambda(p) = \xi(\sum \pi_i(\lambda(p)) x_i) = \sum \pi_i(\lambda(p))\xi(x_i) = \sum \pi_i(\lambda(p)) y_i.$$

Tomando $\varphi_i = \pi_i\lambda$ se tiene que $p = \sum \varphi_i(p) y_i$.

(b)⇒(c). Es claro.

(c)⇒(a). La condicion (2) nos dice que $\{y_i\}_I$ es un conjunto generador de P. Sea $F = \bigoplus_I Rx_i$ donde $Rx_i \cong R$ para cada $i \in I$ y $\xi : F \to P$ el epimorfismo dado por $\xi(x_i) = y_i$. Usando (1) definimos $\tau : P \to F$ como $\tau(p) = \sum_I \varphi_i(p) x_i$. Entonces $\xi\tau(p) = \xi(\sum_I \varphi_i(p) x_i) = \sum_I \varphi_i(p) y_i = p$. Por lo tanto ξ se escinde, así que $F = \operatorname{Ker}\xi \oplus \operatorname{Im}\tau$. Como ξ es suprayectiva, $P \cong \operatorname{Im}\tau$ y por lo tanto P es un sumando directo de un libre. Lo que implica que P es proyectivo. □

Proposición 6.3.8. *Sea $Q = \prod_I Q_i$. Entonces, Q es inyectivo si y sólo si Q_i es inyectivo para todo $i \in I$.*

Demostración. ⇒. Sean $\alpha : A \to B$ un monomorfismo y $\varphi : A \to Q_i$ un R-morfismo. Consideremos $\eta_i : Q_i \to \bigoplus Q_i$ la inclusión canónica, σ la inclusión de la suma directa en el producto y $\pi_i : \prod_I Q_i \to Q_i$ la proyección canónica. Como Q es inyectivo existe $\kappa : B \to Q$ tal que $\kappa\alpha = \sigma\eta_i\varphi$.

Entonces $\pi_i\kappa$ es el morfismo requerido ya que $\pi_i\kappa\alpha = \pi_i\sigma\eta_i\varphi = Id_{Q_i}\varphi = \varphi$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi"'] & B \arrow[dddl, "\kappa"] \\
Q_i \arrow[d, "\eta_i"'] & \\
\bigoplus Q_i \arrow[d, "\sigma"'] & \\
\prod Q_i \arrow[d, "\pi_i"'] & \\
Q_i &
\end{tikzcd}$$

$\Leftarrow$. Sea $\alpha : A \to B$ un monomorfismo y $\varphi : A \to Q$ un R-morfismo. Como Q_i es inyectivo para cada $i \in I$, existen morfismos $\kappa_i : B \to Q_i$ tales que $\kappa_i\alpha = \pi_i\varphi$ para toda $i \in I$, donde π_i son las proyecciones canónicas. Por el Teorema 5.1.3 tenemos que la familia de morfismos $\{\kappa_i\}$ definen un único morfismo $\kappa : B \to Q$ tal que $\pi_i\kappa = \kappa_i$. Entonces $\pi_i\kappa\alpha = \pi_i\varphi$ y por la unicidad de κ se tiene que $\kappa\alpha = \varphi$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi"'] & B \arrow[dl, dashed, "\kappa"'] \arrow[ddl, "\kappa_i"] \\
Q \arrow[d, "\pi_i"'] & \\
Q_i &
\end{tikzcd}$$

$\square$

Teorema 6.3.9. *Un $\mathbb{Z}$-módulo es inyectivo si y sólo si es divisible.*

Demostración. $\Rightarrow$. Supongamos que ${}_{\mathbb{Z}}Q$ es inyectivo. Sean $0 \neq z_0 \in \mathbb{Z}$, $q_0 \in Q$ e $i : \mathbb{Z}z_0 \to \mathbb{Z}$ la inclusión canónica. Definimos $\varphi : \mathbb{Z}z_0 \to Q$ como $\varphi(nz_0) = nq_0$ que es un $\mathbb{Z}$-morfismo. Como Q es inyectivo, existe $\kappa : \mathbb{Z} \to Q$ tal que $\kappa i = \varphi$. Así que $z_0\kappa(1) = \kappa(z_0) = \varphi(z_0) = q_0$. Por lo tanto $z_0Q = Q$, lo que implica que Q es divisible.

$\Leftarrow$. Se sigue del Teorema 5.3.10. $\square$

Lema 6.3.10. *Sea R un anillo. Si ${}_{\mathbb{Z}}D$ es divisible, entonces el R-módulo izquierdo* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R_R, D)$ *es inyectivo.*

Demostración. Sean $\alpha : A \to B$ un R-monomorfismo y $\varphi : A \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R_R, D)$ cualquier R-morfismo. Definimos $\sigma : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R_R, D) \to D$ como $\sigma(f) = f(1)$, el cual es un $\mathbb{Z}$-morfismo. Así que tenemos un $\mathbb{Z}$-morfismo $\sigma\varphi : A \to D$. Por lo tanto existe un $\mathbb{Z}$-morfismo $\tau : B \to D$ tal que $\tau\alpha = \sigma\varphi$.

Definimos $\kappa : B \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R_R, D)$ como $\kappa(b)(r) = \tau(rb)$ el cual es un R-morfismo. Entonces

$$\kappa\alpha(a)(r) = \tau(r\alpha(a)) = \tau(\alpha(ra)) = \sigma\varphi(ra) = \varphi(ra)(1) = r\varphi(a)(1) = \varphi(a)(r).$$

Por lo tanto $\kappa\alpha = \varphi$, lo que implica que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R_R, D)$ es inyectivo.

$$\begin{tikzcd}
{}_RA \arrow[r, tail, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi"'] & {}_RB \arrow[dl, dashed, "\kappa"] \arrow[ddl, "\tau"] \\
\mathrm{Hom}({}_{\mathbb{Z}}R_R, {}_{\mathbb{Z}}D) \arrow[d, "\sigma"'] & \\
{}_{\mathbb{Z}}D &
\end{tikzcd}$$

□

Teorema 6.3.11. *Para todo R-modulo M existe un monomorfismo $\varphi : M \to Q$ con Q un R-módulo inyectivo.*

Demostración. Sea M un R-módulo. Visto M como grupo abeliano existe un monomorfismo $\mu : {}_{\mathbb{Z}}M \to {}_{\mathbb{Z}}D$ con D divisible por el Teorema 5.3.3. Definimos $\rho : {}_RM \to {}_R\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D)$ como $\rho(m)(r) = \mu(rm)$ que es un R-morfismo. Además si $\rho(m) = 0$, entonces $\rho(m)(r) = 0$ para todo $r \in R$. Así $\mu(rm) = 0$ para todo $r \in R$, en particular $\mu(m) = 0$ pero μ es monomorfismo lo que implica que $m = 0$. Por lo tanto ρ es un monomorfismo. □

Corolario 6.3.12. *Un módulo ${}_RQ$ es inyectivo si y sólo si Q es isomorfo a un sumando directo de* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R_R, D)$ *para algún ${}_{\mathbb{Z}}D$ divisible.*

Demostración. $\Rightarrow$. Por el Teorema 6.3.11 existe un monomorfismo de Q en $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D)$ para algún ${}_{\mathbb{Z}}D$ divisible y este monomorfismo se escinde porque Q es inyectivo. Por lo tanto Q es isomorfo a un sumando directo de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R_R, D)$.

$\Leftarrow$. Se sigue por la Proposición 6.3.8. □

Lema 6.3.13. *Si $\rho : M \to N$ es un monomorfismo entonces existen un R-módulo N' tal que $M \leq N'$ y $\tau : N' \to N$ un isomorfismo tal que si i es la inclusión de M en N' $\tau i = \rho$.*

Demostración. Sea L un conjunto tal que $|L| = |N - \rho(M)|$ y $L \cap M = \emptyset$. Sea $\beta : L \to N - \rho(M)$ una biyección. Definimos $N' = L \cup M$ y $\tau : N' \to N$ como $\tau(m) = \rho(m)$ si $m \in M$ y $\tau(l) = \beta(l)$ si $l \in L$.

Le damos estructura de R-modulo a N' de la siguiente manera: sean $x, y \in N'$ y $r \in R$ entonces $x + y = \tau^{-1}(\tau(x) + \tau(y))$ y $rx = \tau^{-1}(r\tau(x))$. Con estas operaciones τ es un isomorfismo. □

Observación 6.3.14. Con el Lema 6.3.13 y el Teorema 6.3.11, tenemos que todo R-módulo es submódulo de un inyectivo.

Teorema 6.3.15 (Criterio de Baer). *Un R-módulo Q es inyectivo si y sólo si para todo $I \leq R$ ideal izq. y todo R-morfismo $\varphi : I \to Q$ existe $\eta : R \to Q$ tal que $\eta i = \varphi$, donde $i : I \to R$ es la inclusión canónica.*

Demostración. Sea $\alpha : A \to B$ un monomorfismo y $\psi : A \to Q$ un morfismo. Consideremos el conjunto $\Gamma = \{(C, \gamma) \mid C \leq B,\ \gamma : C \to Q$ tal que $\gamma\alpha = \psi\}$. Se tiene que $\Gamma \neq \emptyset$ ya que $(\operatorname{Im}\alpha, \alpha_0) \in \Gamma$ con $\alpha_0 = \alpha$ correstringida a su imagen, que es un isomorfismo. Además Γ es un COPO, donde el orden está dado de la siguiente manera: $(C, \gamma) \leq (D, \eta)$ si y sólo si $C \leq D$ y $\eta|_C = \gamma$. Por el Lema de Zorn, Γ tiene máximos. Sea (C, γ) un máximo en Γ. Supongamos que existe $0 \neq b \in B - C$ y tomemos $C + Rb$. Si $C \cap Rb = 0$ se contradiría la maximalidad de (C, γ) ya que φ se podría extender a $C \oplus Rb$. Supongamos que $C \cap Rb \neq 0$ y concideremos $(C : b) = \{r \in R \mid rb \in C\} \leq R$ que es distinto de cero. Entonces tenemos un R-morfismo $(\_ \cdot b) : (C : b) \to C$ dado por $(\_ \cdot b)(r) = rb$. Por hipótesis existe $\tau : R \to Q$ tal que $\tau i = \gamma(\_ \cdot b)$. Definimos $\gamma_1 : C + Rb \to Q$ como $\gamma_1(c+rb) = \gamma(c)+\tau(r)$. Notemos que $\gamma_1|_C = \gamma$. Entonces $(C+Rb, \gamma_1) \in \Gamma$ pero $(C, \gamma) < (C + Rb, \gamma_1)$ lo que es una contradicción. Por lo tanto $C = B$ y Q es inyectivo. El regreso es obvio. □

6.4. Cápsulas Inyectivas y Cubiertas Proyectivas

Definición 6.4.1. Un monomorfismo $\eta : M \to Q$ es una *cápsula inyectiva* de M si Q es inyectivo y η es un monomorfismo esencial.

Definición 6.4.2. Un epimorfismo $\xi : P \to M$ es una *cubierta proyectiva* de M si P es proyectivo y ξ es un epimorfismo superfluo.

Ejemplo 6.4.3. (I) Si $i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ es la inclusión canónica, entonces i es cápsula inyectiva de $\mathbb{Z}$ ya que $\mathbb{Z} \leq_e \mathbb{Q}$.

(II) Considere el anillo $R = \mathbb{Z}_4$. Entonces R es una cubierta proyectiva de $2\mathbb{Z}_4$.

Lema 6.4.4. *1. Si $\eta_i : M_i \to Q_i$ es capsula inyectiva de M_i con $1 \leq i \leq n$ entonces $\bigoplus \eta_i : \bigoplus_{i=1}^n M_i \to \bigoplus_{i=1}^n Q_i$ es capsula inyectiva de $\bigoplus M_i$.*

2. Si $\xi_i : P_i \to M_i$ es cubierta proyectiva de M_i con $1 \leq i \leq n$ entonces $\bigoplus \xi_i : \bigoplus_{i=1}^n P_i \to \bigoplus_{i=1}^n M_i$ es cubierta proyectiva de $\bigoplus M_i$.

Demostración. Se sigue de que la suma directa preserva monomorfismos y epimorfismos (Proposición 5.1.7), y de los Lemas 6.1.4 y 6.1.7. □

Teorema 6.4.5. *Si $\varphi : M_1 \to M_2$ es un isomorfismo, $\eta_1 : M_1 \to Q_1$ es una cápsula inyectiva de M_1 y $\eta_2 : M_2 \to Q_2$ es un monomorfismo, entonces existe $\psi : Q_1 \to Q_2$ monomorfismo que se escinde y tal que $\eta_2\varphi = \psi\eta_1$. Definiendo $\eta_2' : M_2 \to \operatorname{Im}\psi$ se tiene que η_2' es cápsula inyectiva de M_2. Además ψ es isomorfismo si y sólo si η_2 es cápsula inyectiva.*

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, tail, "\eta_1"] \arrow[d, tail, "\varphi"'] & Q_1 \arrow[ddl, dashed, "\psi"] \\
M_2 \arrow[d, tail, "\eta_2"'] & \\
Q_2 &
\end{tikzcd}$$

Demostración. Como Q_2 es inyectivo existe $\psi : Q_1 \to Q_2$ tal que $\psi\eta_1 = \eta_2\varphi$. Notemos que $\operatorname{Ker}\psi \cap \operatorname{Im}\eta_1 = 0$ ya que $\eta_2\varphi$ es monomorfismo. Como $\operatorname{Im}\eta_1 \leq_e Q_1$, $\operatorname{Ker}\psi = 0$. Por lo tanto ψ es un monomorfismo. Ahora, como Q_2 es inyectivo, ψ se escinde. Así que $\operatorname{Im}\psi$ es sumando directo de Q_2, lo que implica que $\operatorname{Im}\psi$ es inyectivo. Notemos que $\operatorname{Im}\eta_2 \subseteq \operatorname{Im}\psi$ ya que si $x \in \operatorname{Im}\eta_2$ existe $y \in M_2$ tal que $x = \eta_2(y)$ pero φ es isomorfismo, así que existe $z \in M_1$ tal que $\varphi(z) = y$. Entonces $x = \eta_2\varphi(z) = \psi\eta_1(z)$ y por lo tanto $x \in \operatorname{Im}\psi$. Tomemos η_2 correstringida a su imagen, i.e., $\eta_2' : M_2 \to \operatorname{Im}\psi$ y ψ también correstringida a su imagen, $\psi' : Q_1 \to \operatorname{Im}\psi$, que es un isomorfismo. Además $\psi'\eta_1(M_1) = \eta_2'\varphi(M_1) = \eta_2'(M_2)$, así que $\eta_1(M_1) = \psi'^{-1}(\eta_2'(M_2))$. Como $\eta_1(M_1) \leq_e Q_1$ y ψ' es un isomorfismo, $\psi'(\eta_1(M_1)) \leq_e \operatorname{Im}\psi$. Pero $\psi'\eta_1(M_1) = \eta_2'(M_2)$ y por lo tanto $\operatorname{Im}\eta_2' \leq_e \operatorname{Im}\psi$. Lo que implica que η_2' es cápsula inyectiva de M_2.

Si ψ es isomorfismo entonces $\eta_2' = \eta$, así que η_2 es cápsula inyectiva de M_2. Recíprocamente, si η_2 es cápsula inyectiva de M_2, entonces $\operatorname{Im}\eta_2 \leq_e Q_2$ pero $\operatorname{Im}\eta_2 \leq \operatorname{Im}\psi$ lo que implica que $\operatorname{Im}\psi \leq_e Q_2$. Como $\operatorname{Im}\psi$ es sumando directo de Q_2, $\operatorname{Im}\psi = Q_2$. Por lo tanto ψ es isomorfismo. $\square$

Teorema 6.4.6. *Si $\varphi : M_1 \to M_2$ es un isomorfismo, $\xi_1 : P_1 \to M_1$ es un epimorfismo y $\xi_2 : P_2 \to M_2$ es una cubierta proyectiva, entonces existe $\psi : P_1 \to P_2$ epimorfismo que se escinde y tal que $\xi_2\psi = \varphi\xi_1$. Si $P_1 = \operatorname{Ker}\psi \oplus P_0$ definiendo $\xi_1' = \xi_1|_{P_0}$ se tiene que ξ_1' es cubierta proyectiva de M_1. Además ψ es isomorfismo si y sólo si ξ_1 es cubierta proyectiva.*

$$\begin{tikzcd}
 & P_1 \arrow[d, "\xi_1"] \arrow[ddl, dashed, "\psi"'] \\
 & M_1 \arrow[d, "\varphi"] \\
P_2 \arrow[r, two heads, "\xi_2"] & M_2
\end{tikzcd}$$

Demostración. Como P_1 es proyectivo, existe $\psi : P_1 \to P_2$ tal que $\xi_2\psi = \varphi\xi_1$. Tenemos que $\operatorname{Im}\psi + \operatorname{Ker}\xi_2 = P_2$ ya que si $x \in P_2$ entonces $\xi_2(x) = \varphi\xi_1(y)$ para algún $y \in P_1$ y $\varphi\xi_1(y) = \xi_2\psi(y)$. Así que $x - \psi(y) \in \operatorname{Ker}\xi_2$. Entonces $x = (x - \psi(y)) + \psi(y)$. Pero $\operatorname{Ker}\xi_2 << P_2$. Por lo tanto $\operatorname{Im}\psi = P_2$, es decir, ψ es un epimorfismo. Como P_2 es proyectivo, ψ se escinde i.e. $P_1 = \operatorname{Ker}\psi \oplus P_0$ y podemos tomar $\xi_1' = \xi|_{P_0}$. Ahora si $\psi(x) = 0$, entonces $0 = \xi_2\psi(x) = \varphi\xi_1(x)$. Como φ es monomorfismo, $\xi_1(x) = 0$. Por lo tanto $\operatorname{Ker}\psi \leq \operatorname{Ker}\xi_1$. Si $m_1 \in M_1$, entonces existe $k + p = x \in P_1$ con $k \in \operatorname{Ker}\psi$ y $p \in P_0$, tal que $m_1 = \xi_1(x)$ pero $\xi_1(x) = \xi'(p)$. Por lo tanto ξ_1' es suprayectiva. Sea $\psi' = \psi|_{P_0}$. Entonces ψ' es un isomorfismo y $\varphi\xi_1' = \xi_2\psi'$. Así que $\xi_1' = \varphi^{-1}\xi_2\psi'$. Se sigue que $\operatorname{Ker}\xi_1' = \psi'^{-1}(\operatorname{Ker}\varphi^{-1}\xi_2) = \psi'^{-1}(\xi_2^{-1}(\operatorname{Ker}\varphi^{-1})) = \psi'^{-1}(\xi_2^{-1}(0)) = \psi'^{-1}(\operatorname{Ker}\xi_2)$. Como el $\operatorname{Ker}\xi_2 << P_2$, $\operatorname{Ker}\xi_1' << P_0$ por el Lema 6.1.4. Por lo tanto ξ_1' es cubierta proyectiva de M_1. Si ahora tenemos que ψ es un isomorfismo entonces $\xi_1' = \xi$. Así que ξ_1 es cubierta proyectiva de M_1. Recíprocamente, si ξ_1 es cubierta proyectiva de M_1 entonces $\operatorname{Ker}\xi_1 << P_1$. Como $\operatorname{Ker}\psi \leq \operatorname{Ker}\xi_1$, $\operatorname{Ker}\psi << P_1$ pero $\operatorname{Ker}\psi$ es sumando directo de P_1. Por lo tanto $\operatorname{Ker}\psi = 0$. En consecuencia, ψ es un isomorfismo. □

Observación 6.4.7. Como consecuencia de los Teoremas 6.4.5 y 6.4.6, tenemos que la cápsula inyectiva y la cubierta proyectiva (si existe) de un módulo M, es única salvo isomorfismo.

Teorema 6.4.8. *Todo R-módulo M tiene cápsula inyectiva.*

Demostración. Sea M un R-módulo. Por el Teorema 6.3.11, existe un monomorfismo $\mu : M \to Q$ con Q inyectivo. Sea $A = \mu(M) \leq Q$. Sean A' un pseudocomplemento de A y A'' un pseudocomplemento de A' tal que $A \subseteq A''$. Entonces $A \leq_e A''$ y A' y A'' son pseudocomplementos uno del otro.

Definimos

$$\alpha : Q \to Q/A' \oplus Q/A'' \text{ como } \alpha(q) = (q + A', q + A'')$$

$$\beta : A' \oplus A'' \to Q/A' \oplus Q/A'' \text{ como } \beta(a' + a'') = (a'' + A', a' + A'').$$

Sea $i : A' \oplus A'' \to Q$ la inclusión canónica. Entonces $\alpha i = \beta$ y $\operatorname{Im}\beta \subseteq \operatorname{Im}\alpha$. Ahora si $\beta(a' + a'') = 0$, es decir, $(a'' + A', a' + A'') = (0 + A', 0 + A'')$, entonces $a' \in A'' \cap A' = 0$ y $a'' \in A' \cap A'' = 0$. Por lo tanto β es monomorfismo. Si $\alpha(q) = 0$, es decir, $(q + A', q + A'') = (0 + A', 0 + A'')$, entonces $q \in A' \cap A'' = 0$. Por lo tanto α es monomorfismo. Como Q es inyectivo, α se escinde. Por la Proposición 6.1.16, tenemos que $(A'' + A')/A' \leq_e Q/A'$ y $(A' + A'')/A'' \leq_e Q/A''$. Entonces $\operatorname{Im}\beta = (A'' + A')/A' \oplus (A' + A'')/A'' \leq_e Q/A' \oplus Q/A''$ pero $\operatorname{Im}\beta \subseteq \operatorname{Im}\alpha$ y α se escinde lo que implica que $\operatorname{Im}\alpha = Q/A' \oplus Q/A''$. Por lo tanto α es un isomorfismo.

Sea $q \in Q$ y $(q + A', 0 + A'') \in Q/A' \oplus Q/A''$. Como α es suprayectiva, existe $q' \in Q$ tal que $\alpha(q') = (q + A', 0 + A'')$. Entonces $(q' + A', q' + A'') = (q + A', 0 + A'')$, lo que implica que $q' \in A''$ y $q - q' \in A'$. Así $q = (q - q') + q' \in A' \oplus A''$. Por lo tanto $Q = A' \oplus A''$, lo que implica que A'' es inyectivo. Tomemos μ' igual a μ correstringida a A'', es decir, $\mu' : M \to A''$. Entonces μ' es cápsula inyectiva de M. □

Definición 6.4.9. A un monomorfismo esencial $\alpha : A \to B$ le llamamos una *extensión esencial* de A. Decimos que α es *extensión esencial máxima* de A si toda extensión esencial de B es un isomorfismo.

Teorema 6.4.10. *Sea $\gamma : M \to W$ un monomorfismo. Entonces, γ es capsula inyectiva de M si y sólo si γ es extención esencial máxima de M.*

Demostración. Supongamos que W es inyectivo, γ es esencial y que $\beta : W \to B$ es un monomorfismo esencial. Como W es inyectivo β se escinde, es decir, $W \cong \beta(W)$ es sumando directo de B. Pero, $\beta(B) \leq_e B$. Entonces $\beta(W) = B$. Por lo tanto β es un isomorfismo.

Ahora supongamos que γ es extensión esencial máxima. Si $\alpha : M \to Q$ es cápsula inyectiva de M, entonces existe $\beta : W \to Q$ tal que $\beta\gamma = \alpha$. Sea $x \in \operatorname{Im}\gamma \cap \operatorname{Ker}\beta$. Entonces existe $m \in M$ tal que $\gamma(m) = x$ y por otro lado $\beta(x) = 0$. Así, $0 = \beta\gamma(m) = \alpha(m)$, pero α es monomorfismo. Por lo tanto $m = 0$ y $\gamma(m) = x = 0$. Como $\operatorname{Im}\gamma \leq_e W$, $\operatorname{Ker}\beta = 0$. Además $\operatorname{Im}\alpha \subseteq \operatorname{Im}\beta$ y $\operatorname{Im}\alpha \leq_e Q$, por lo tanto $\operatorname{Im}\beta \leq_e Q$. Esto implica que β es extensión esencial de W, pero γ es extensión esencial máxima así que β es isomorfismo. Por lo tanto W es inyectivo y γ es cápsula inyectiva. □

Como hemos visto todo R-módulo tiene cápsula inyectiva. Desgracidamente no es cierto que todo R-módulo tenga cubierta proyectiva como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6.4.11. Consideremos la categoría $\mathbb{Z}$-Mod. Sea $0 \neq n \in \mathbb{Z}$. Consideremos el $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Supongamos que $\xi : P \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ es cubierta proyectiva. Como estamos en $\mathbb{Z}$-Mod, $P = \mathbb{Z}^{(X)}$ para algún conjunto X. Al ser $\mathbb{Z}$ proyectivo, existe $\alpha : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^{(X)}$ tal que $\pi = \xi\alpha$.

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{Z} \arrow[dl, dashed, "\alpha"'] \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{Z}^{(X)} \arrow[r, "\xi"'] & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

Como ξ es un epimorfismo superfluo y π es epimorfismo, α es epimorfismo. Esto implica que el núcleo de α es sumando directo de $\mathbb{Z}$, pero $\mathbb{Z}$ no tiene sumandos directos no triviales, por lo tanto $\operatorname{Ker}\alpha = 0$. Así α es un isomorfismo. Por lo tanto $\mathbb{Z}^{(X)} \cong \mathbb{Z}$. Esto no puede ser si $|X| > 1$, ya que en $\mathbb{Z}$ todo submódulo es esencial. Por lo tanto $|X| = 1$. Entonces $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ es un epimorfismo superfluo, pero el único submódulo superfluo de $\mathbb{Z}$ es 0. Por lo tanto π es un isomorfismo, que es una contradicción. Por lo tanto $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ no tiene cubierta proyectiva.

Existen anillos en los cuales todo módulo tiene cubierta proyectiva. A estos anillos se les llama *perfectos* y serán estudiados en el Capítulo 11.

6.5. Ejemplo de una cápsula inyectiva

En esta sección calcularemos una cápsula inyectiva de un anillo finito usando el Teorema 6.3.11. Considere el siguiente anillo

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & (x,y) \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a, x, y \in \mathbb{Z}_2 \right\}$$

con las operaciones usuales de matrices y del $\mathbb{Z}_2$-módulo $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. A este anillo se le llama la *extensión trivial* del $\mathbb{Z}_2$ por $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ y se denota como $\mathbb{Z}_2 \ltimes \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. El anillo R es un anillo conmutativo finito con 4 ideales no triviales:

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & (0,0) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & (1,0) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$S_2 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 & (0,0) \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & (1,1) \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \right\}$$

$$S_3 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 & (0,0) \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & (0,1) \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \right\}$$

$$I = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 & (0,0) \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & (1,1) \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & (0,1) \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & (1,0) \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \right\}$$

La retícula de ideales de R se ve de la siguiente manera

$$\begin{tikzcd}
& R \arrow[d, dash] & \\
& I \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
S_1 \arrow[dr, dash] & S_2 \arrow[d, dash] & S_3 \arrow[dl, dash] \\
& 0 &
\end{tikzcd}$$

Notemos que I es esencial en R, entonces una cápsula inyectiva para R es una cápsula inyectiva para I. Por el Teorema 6.4.5, la cápsula inyectiva $E(I)$ de I tiene que ser isomorfa a la cápsula inyectiva $E(R)$ de R. Entonces lo que nos interesa calcular es la cápsula inyectiva de uno de los ideales simples S_1, S_2 o S_3 ya que $I = S_i \oplus S_j$ con $i \neq j$. Como grupo abeliano S_1 es isomorfo a $\mathbb{Z}_2$. Notemos que hay un monomorfismo esencial de grupos abelianos $\mathbb{Z}_2 \hookrightarrow \mathbb{Z}_{2^\infty}$ y que $\mathbb{Z}_{2^\infty}$ es divisible. Por el Lema 6.3.10, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Z}_{2^\infty})$ es un R-módulo inyectivo y por el Teorema 6.3.11, existe un R-monomorfismo $S_1 \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Z}_{2^\infty})$. Como cada elemento de R tiene orden 2 y en $\mathbb{Z}_{2^\infty}$ solo hay un elemento de orden 2, digamos c, todo morfismo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Z}_{2^\infty})$ se factoriza a través del submodulo $\mathbb{Z}c \leq \mathbb{Z}_{2^\infty}$.

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\bar{f}"'] & \mathbb{Z}_{2^\infty} \\
& \mathbb{Z}c \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Se tiene que $\mathbb{Z}c \cong \mathbb{Z}_2$ como grupos abelianos, así que solo tenemos que describir $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Z}_2)$. Para esto notemos que $R \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ como grupos abelianos. Por lo tanto

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Z}_2) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2)$$

$$\cong \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2) \oplus \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2) \oplus \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2) \cong \mathrm{M}_{1\times 3}(\mathbb{Z}_2),$$

donde $\mathrm{M}_{1\times 3}(\mathbb{Z}_2)$ es el grupo abeliano de matrices de 1×3 con coeficientes en $\mathbb{Z}_2$. Veamos como es esta acción. Consideremos $(u, v, w) \in \mathrm{M}_{1\times 3}(\mathbb{Z}_2)$ y $\left(\begin{smallmatrix} a & (x,y) \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right) \in R$. Entonces

$$(u, v, w) \left(\begin{smallmatrix} a & (x,y) \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right) = ua + vx + wy \in \mathbb{Z}_2.$$

El monomorfismo de grupos abelianos $\mu : S_1 \hookrightarrow \mathbb{Z}_{2^\infty}$ está dado por

$$\mu\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & (1,0) \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right) = c$$

Siguiendo la prueba del Teorema 6.3.11, el monomorfismo $\xi : S_1 \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Z}_{2^\infty})$ se calcula como

$$\xi\left(\begin{smallmatrix} 0 & (1,0) \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\left(\begin{smallmatrix} a & (x,y) \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)\right) = \mu\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & (1,0) \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a & (x,y) \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)\right) = \mu\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & (a,0) \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right) = \begin{cases} 0 & \text{si} \;\; a = 0 \\ c & \text{si} \;\; a = 1 \end{cases}$$

Como $\mathbb{Z}c \cong \mathbb{Z}_2$ mandando c a 1, tenemos que $\xi\left(\begin{smallmatrix} 0 & (1,0) \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ como morfismo de R a $\mathbb{Z}_2$ se calcula como

$$\xi\left(\begin{smallmatrix} 0 & (1,0) \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\left(\begin{smallmatrix} a & (x,y) \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)\right) = \begin{cases} 0 & \text{si} \;\; a = 0 \\ 1 & \text{si} \;\; a = 1 \end{cases}$$

Por otro lado

$$(1,0,0)\left(\begin{smallmatrix} a & (x,y) \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right) = 1a + 0 + 0 = a.$$

Esto implica que bajo el isomorfismo $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Z}_{2^\infty}) \cong \mathrm{M}_{1\times 3}(\mathbb{Z}_2)$, $\xi\left(\begin{smallmatrix} 0 & (1,0) \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ corresponde a $(1,0,0)$. Ahora describiremos la estructura de R-módulo izquierdo de $\mathrm{M}_{1\times 3}(\mathbb{Z}_2)$. Sea $\left(\begin{smallmatrix} a & (x,y) \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right) \in R$ y $(m,n,w) \in \mathrm{M}_{1\times 3}(\mathbb{Z}_2)$. Así

$$\left[\begin{pmatrix} a & (x,y) \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot (m,n,w)\right]\begin{pmatrix} b & (v,u) \\ 0 & b \end{pmatrix} = (m,n,w)\left[\begin{pmatrix} b & (v,u) \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & (x,y) \\ 0 & a \end{pmatrix}\right]$$

$$= (m,n,w)\begin{pmatrix} ab & (av+bx, au+by) \\ 0 & ab \end{pmatrix} = (m,n,w)\begin{pmatrix} ab \\ av+bx \\ au+by \end{pmatrix}$$

$$= mab + n(av+bx) + w(au+by) = b(ma+nx+wy) + v(na) + u(wa).$$

Por lo tanto

$$\begin{pmatrix} a & (x,y) \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot (m,n,w) = (am+xn+yw, an, aw).$$

Con esta acción podemos ver que

$$\begin{pmatrix} 0 & (1,0) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot (0,1,0) = (1,0,0)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & (1,0) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot (0,1,0) = (1,0,0)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & (0,1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot (0,0,1) = (1,0,0)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & (1,0) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot (0,1,1) = (1,0,0)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & (1,0) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot (1,0,1) = (1,0,0)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & (1,0) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot (1,1,1) = (1,0,0)$$

Usando la Proposición 5.3.8 tenemos que $\xi : S_1 \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Z}_{2^\infty}) \cong \mathrm{M}_{1\times 3}(\mathbb{Z}_2)$ es un monomorfismo esencial, por lo tanto $\mathrm{M}_{1\times 3}(\mathbb{Z}_2)$ es la cápsula inyectiva de

S_1. Al principio del ejemplo notamos que $E(R) = E(I)$ y que $I \cong S_1 \oplus S_1$. Por lo tanto una cápsula inyectiva del anillo R es $E(S_1) \oplus E(S_1) = \mathrm{M}_{1\times 3}(\mathbb{Z}_2) \oplus \mathrm{M}_{1\times 3}(\mathbb{Z}_2)$.

$$\begin{tikzcd} S_1 \oplus S_3 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\zeta"'] & R \arrow[dl, dashed, "\overline{\zeta}"] \\ \mathrm{M}_{1\times 3}(\mathbb{Z}_2) \oplus \mathrm{M}_{1\times 3}(\mathbb{Z}_2) & \end{tikzcd}$$

$I = S_1 \oplus S_3$ y $S_3 \cong S_1$. Tenemos que la inclusión canónica i es un monomorfismo esencial y ζ también es un monomorfismo dado por $\zeta\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & (1,0) \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & (0,1) \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right) = ((1,0,0),(1,0,0))$. Por lo tanto, $\overline{\zeta}$ es un momorfismo esencial. Podemos ver que $\overline{\zeta}$ está definido como

$$\overline{\zeta}\left(\left(\begin{smallmatrix} a & (x,y) \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)\right) = ((x,a,0),(y,a,0)).$$

Veamos que $\overline{\zeta}$ es un R-morfismo.

$$\begin{aligned} \overline{\zeta}\left[\begin{pmatrix} a & (x,y) \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & (v,u) \\ 0 & b \end{pmatrix}\right] &= \overline{\zeta}\begin{pmatrix} ab & (av+bx, au+by) \\ 0 & ab \end{pmatrix} \\ &= ((av+bx, ab, 0),(au+by, ab, 0)) \\ &= \begin{pmatrix} a & (x,y) \\ 0 & a \end{pmatrix}((v,b,0),(u,b,0)) \\ &= \begin{pmatrix} a & (x,y) \\ 0 & a \end{pmatrix}\overline{\zeta}\left(\begin{pmatrix} b & (v,u) \\ 0 & b \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

Así $\overline{\zeta} : R \to \mathrm{M}_{1\times 3}(\mathbb{Z}_2) \oplus \mathrm{M}_{1\times 3}(\mathbb{Z}_2)$ es una cápsula inyectiva del anillo R.

6.6. Generadores y Cogeneradores de R-Mod

Definición 6.6.1. Sean A y B en R-Mod. Definimos

$$\mathrm{Im}(A,B) = \sum\{\mathrm{Im}\,\varphi \mid \varphi \in \mathrm{Hom}_R(A,B)\}$$

$$\mathrm{Ker}(A,B) = \bigcap\{\mathrm{Ker}\,\varphi \mid \varphi \in \mathrm{Hom}_R(A,B)\}$$

Definición 6.6.2. Decimos que un R-módulo G es *generador* de R-Mod si para todo M en R-Mod se tiene que $\mathrm{Im}(G,M) = M$.

Definición 6.6.3. Decimos que un R-módulo C es *cogenerador* de R-Mod si para todo M en R-Mod se tiene que $\mathrm{Ker}(M,C) = 0$.

Ejemplo 6.6.4. El módulo ${}_RR$ es generador de R-Mod. Esto es porque si tomamos un R-módulo M y $m \in M$ entonces podemos considerar el morfismo $(\_ \cdot m) : R \to M$. Así, $m = (\_ \cdot m)(1) \in \mathrm{Im}(R,M)$. Por lo tanto $M = \mathrm{Im}(R,M)$.

Lema 6.6.5.
1. *Sea G un generador. Si A es un módulo tal que* $\mathrm{Im}(A,G) = G$*, entonces A es un generador.*
2. *Sea M un R-módulo. Si existe un epimorfismo de M en R, entonces M es un generador.*

3. *Sea C un cogenerador. Si D un módulo tal que* $\mathrm{Ker}(D,C)=0$, *entonces D es un cogenerador.*

Demostración. *1.* Sea M un módulo. Consideremos

$$\sum\{\mathrm{Im}\, hg \mid h\in \mathrm{Hom}_R(G,M)\ g\in \mathrm{Hom}_R(A,G)\} = \sum h(\mathrm{Im}\, g)$$

$$= \sum h(\sum \mathrm{Im}\, g) = \sum h(G) = \sum \mathrm{Im}\, h = M.$$

Por otro lado,

$$\sum\{\mathrm{Im}\, hg \mid h\in \mathrm{Hom}_R(G,M)\ g\in \mathrm{Hom}_R(A,G)\} \subseteq \mathrm{Im}(A,M).$$

Por lo tanto $\mathrm{Im}(A,M)=M$, es decir, A es generador.

2. Si tenemos un epimorfismo de M en R entonces $\mathrm{Im}(M,R)=R$. Como R es un generador aplicamos el inciso anterior.

3. Sea M un módulo. Tenemos que

$$\mathrm{Ker}(D,M)\subseteq \bigcap\{\mathrm{Ker}\, fg \mid g\in \mathrm{Hom}_R(D,C)\ f\in \mathrm{Hom}_R(C,M)\}\subseteq \mathrm{Ker}(D,C)=0.$$

Por lo tanto D es cogenerador. □

Teorema 6.6.6. *G es un generador si y sólo si para todo $0\neq h\in \mathrm{Hom}_R(M,N)$ existe $f\in \mathrm{Hom}_R(G,M)$ tal que $hf\neq 0$.*

Demostración. $\Rightarrow$. Sea $0\neq h\in \mathrm{Hom}_R(M,N)$. Entonces $h(m)\neq 0$ para algún $m\in M$. Como G es un generador, $m=\sum_{i=1}^k f_i(a_i)$ con $f_i\in \mathrm{Hom}_R(G,M)$. Luego $0\neq h(m)=h(\sum_{i=1}^k f_i(a_i))=\sum_{i=1}^k h(f_i(a_i))$. Así que $hf_i(a_i)\neq 0$ para algún $i\in\{1,...,k\}$. Por lo tanto $hf_i\neq 0$.

$\Leftarrow$. Supongamos que $\mathrm{Im}(G,M)<M$ para algún módulo M. Entonces $M/\mathrm{Im}(G,M)\neq 0$. Sea $\pi: M\to M/\mathrm{Im}(G,M)$ la proyección canónica. Por hipótesis existe $f\in \mathrm{Hom}_R(G,M)$ tal que $\pi f\neq 0$. Entonces existe $g\in G$ tal que $f(g)\notin \mathrm{Im}(G,M)$ lo que implica que $\mathrm{Im}(f)$ no esta contenida en $\mathrm{Im}(G,M)$. Contradicción. □

Teorema 6.6.7. *C es un cogenerador si y sólo si para todo $0\neq g\in \mathrm{Hom}_R(L,M)$ existe $f\in \mathrm{Hom}_R(M,C)$ tal que $fg\neq 0$.*

Demostración. $\Rightarrow$. Sea $0\neq g\in \mathrm{Hom}_R(L,M)$. Entonces existe $l\in L$ tal que $g(l)\neq 0$. Como C es cogenerador, i.e. $\bigcap\{\mathrm{Ker}\,\varphi \mid \varphi\in \mathrm{Hom}_R(M,C)\}=0$, existe $f\in \mathrm{Hom}_R(M,C)$ tal que $f(g(l))\neq 0$.

$\Leftarrow$. Supongamos que $\mathrm{Ker}(M,C)\neq 0$ para algún M. Tomemos $i:\mathrm{Ker}(M,C)\to M$ la inclusión canónica. Por hipótesis, existe $f: M\to C$ tal que $fi\neq 0$. Así que, $\mathrm{Ker}(M,C)$ no esta contenido en $\mathrm{Ker}(f)$. Contradicción. Por lo tanto $\mathrm{Ker}(M,C)=0$ □

Lema 6.6.8. *Sea $\{A_i\}_I$ una familia de R-módulos. Entonces para todo morfismo $\psi:\bigoplus A_i\to M$ se tiene que $\mathrm{Im}\,\psi=\sum \mathrm{Im}\,\psi\eta_i$, donde $\eta_i: A_i\to\bigoplus A_i$ son las inclusiones canónicas.*

Demostración. Cada elemento $(a_i)_I\in\bigoplus A_i$ se ve de la forma $\sum \eta_i(a_i)$. Entonces $\psi((a_i)_I)=\psi(\sum\eta_i(a_i))=\sum\psi(\eta_i(a_i))$. Por lo tanto, $\mathrm{Im}\,\psi\subseteq\sum \mathrm{Im}\,\psi\eta_i$. Recíprocamente, si $m\in\sum_I \mathrm{Im}\,\psi\eta_i$, entonces $m=\sum\psi\eta_i(a_i)=\psi(\sum\eta_i(a_i))=\psi((a_i)_I)$. Por lo tanto $\sum \mathrm{Im}\,\psi\eta_i\subseteq \mathrm{Im}\,\psi$. □

Teorema 6.6.9. *Son equivalentes para un módulo G:*

(a) *G es un generador*

(b) *Toda suma directa de copias de G es un generador*

(c) *Una suma directa de copias de G es un generador*

(d) *Todo módulo M es una imagen epimorfica de una suma directa de copias de G*

Demostración. *1 ⇒ 2.* Supongamos que G es un generador y tomemos $G^{(X)}$. Sea $\pi : G^{(X)} \to G$ una proyección canónica. Como π es suprayectiva, $\mathrm{Im}(G^{(X)}, G) = G$. Así que por el Lema 6.6.5.(1) se tiene que $G^{(X)}$ es generador.

2 ⇒ 3. Es obvio.

3 ⇒ 1. Supongamos que $G^{(X)}$ es un generador con X un conjunto. Sea $0 \neq \mu \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$. Como $G^{(X)}$ es generador, por el Teorema 6.6.6 existe $\varphi : G^{(X)} \to M$ tal que $\mu\varphi \neq 0$. Así existe $i \in X$ tal que $\mu\varphi\eta_i \neq 0$ y $\varphi\eta_i \in \mathrm{Hom}_R(G, M)$. Por lo tanto G es un generador.

1 ⇒ 4. Tomemos $G^{(\mathrm{Hom}_R(G,M))}$ y definimos $\psi : G^{(\mathrm{Hom}_R(G,M))} \to M$ como $\psi(g_\varphi) = \sum \varphi(g_\varphi)$. Como G es generador, $\mathrm{Im}\,\psi = M$, i.e., ψ es un epimorfismo.

4 ⇒ 1. Supongamos que existe un conjunto X y $\psi : G^{(X)} \to M$ un epimorfismo. Para cada $i \in X$ tenemos $\varphi\eta_i : G \to M$ y $M = \mathrm{Im}\,\psi = \sum \mathrm{Im}\,\psi\eta_i \subseteq \sum_{\varphi \in \mathrm{Hom}_R(G,M)} \mathrm{Im}\,\varphi \subseteq M$. Por lo tanto G es un generador. □

Corolario 6.6.10. *G es un generador si y sólo si para todo P proyectivo existe un conjunto X tal que P es isomorfo a un sumando directo de $G^{(X)}$.*

Demostración. ⇒. Sea P proyectivo. Por el Teorema 6.6.9, existe X un conjunto y $\varphi : G^{(X)} \to P$ un epimorfismo. Como P es proyectivo, este epimorfismo se escinde. Por lo tanto P es isomorfo a un sumando directo de $G^{(X)}$.

⇐. Sea M un módulo. Sabemos que existe un epimorfismo $\psi : L \to M$ con L libre. Como los libres son proyectivos, existe X un conjunto tal que L es isomorfo un sumando directo U de $G^{(X)}$. Por lo tanto tenemos el epimorfismo $\psi\pi$ donde $\pi : G^{(X)} \to U \cong L$ es la proyección. Por el Teorema 6.6.9, tenemos que G es un generador. □

Lema 6.6.11. *Sea $\{A_i\}_I$ una familia de módulos. Entonces para todo morfismo $\psi : M \to \prod_I A_i$ se tiene que $\mathrm{Ker}\,\psi = \bigcap_I \mathrm{Ker}\,\pi_i\psi$, donde π_i son las proyecciones canónicas.*

Demostración. Si $m \in \mathrm{Ker}\,\psi$ se tiene que $\pi_i\psi(m) = 0$ para todo $i \in I$. Por lo tanto $m \in \bigcap \mathrm{Ker}\,\pi_i\psi$. Si $m \in \bigcap \mathrm{Ker}\,\pi_i\psi$, implica que $\pi_i\psi(m) = 0$ para toda $i \in I$. Así que la i-ésima componenete de $\psi(m)$ es cero. Por lo tanto $\psi(m) = 0$ es decir, $m \in \mathrm{Ker}\,\psi$. □

Teorema 6.6.12. *Son equivalentes para un módulo C:*

(a) *C es cogenerador*

(b) *Todo producto directo de copias de C es cogenerador*

(c) *Un producto directo de copias de C es cogenerador*

(d) *Todo módulo M se mapea monomorficamente en un producto directo de copias de C*

Demostración. *1* $\Rightarrow$ *2*. Sean C un cogenerador y C^X un producto de copias de C. Si $\eta : C \to C^X$ es una inclusión canónica, entonces $\mathrm{Ker}(C, C^X) = 0$. Por el Lema 6.6.5.(3) se tiene que C^X es cogenerador.

2 $\Rightarrow$ *3*. Es obvio.

3 $\Rightarrow$ *1*. Supongamos que C^X es un cogenerador para algún conjunto X. Si $0 \neq \lambda \in \mathrm{Hom}_R(L, M)$, entonces por el Teorema 6.6.7 existe $\varphi : M \to C^X$ tal que $\varphi\lambda \neq 0$. Entonces existe $i \in X$ tal que $\pi_i\varphi\lambda \neq 0$.

1 $\Rightarrow$ *4*. Tomemos el producto $C^{\mathrm{Hom}_R(M,C)}$. Definimos $\psi : M \to C^{\mathrm{Hom}_R(M,C)}$ como $\psi(m) = ((\varphi(m))_\varphi)$. Si $m \in \mathrm{Ker}\,\psi$, entonces $((\varphi(m))_\varphi) = 0$. Lo que implica que $m \in \mathrm{Ker}\,\varphi$ para toda $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, C)$ pero C es cogenerador entonces $m = 0$. Por lo tanto ψ es monomorfismo.

4 $\Rightarrow$ *1*. Si existe un monomorfismo $\psi : M \to C^X$, entonces por el Lema 6.6.11 $0 = \mathrm{Ker}\,\psi = \bigcap \mathrm{Ker}\,\pi_i\psi \supseteq \mathrm{Ker}\,\varphi$ con $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, C)$. Por lo tanto C es cogenerador. $\square$

Corolario 6.6.13. *C es cogenerador si y sólo si todo módulo inyectivo Q es isomorfo a un sumando directo de C^X para algún conjunto X.*

Demostración. $\Rightarrow$. Sea Q inyectivo. Por el Teorema 6.6.12, existe un monomorfismo $\alpha : Q \to C^X$ para algún conjunto X. Como Q es inyectivo α, se escinde, es decir, Q es isomorfo a un sumando directo de C^X.

$\Leftarrow$. Sea M un módulo. Entonces existe un monomorfismo $\alpha : M \to Q$ con Q inyectivo. Por hipótesis existe un conjunto X tal que Q es un sumando directo de C^X. Así que, si i es la inclusión de Q en C^X, entonces tenemos un monomorfismo $i\alpha : M \to C^X$. Por el Teorema 6.6.12, C es cogenerador. $\square$

Teorema 6.6.14. *Sea C un R-módulo. Entonces, C es cogenerador si y sólo si C contiene una copia isomorfa de la cápsula inyectiva de cada R-módulo simple.*

Demostración. $\Rightarrow$. Sea S simple y $E(S)$ su cápsula inyectiva. Por hipótesis, $\bigcap \mathrm{Ker}\,\varphi = 0$ con $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(E(S), C)$. Así que no puede pasar que $S \subseteq \mathrm{Ker}\,\varphi$ para todo $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(E(S), C)$. Por lo tanto existe φ tal que S no esta contenido en $\mathrm{Ker}\,\varphi$ y como S es simple $S \cap \mathrm{Ker}\,\varphi = 0$. Pero $S \leq_e E(S)$, por lo tanto $\mathrm{Ker}\,\varphi = 0$.

$\Leftarrow$. Sea $0 \neq M$ y $0 \neq m \in M$. Tomemos $Rm \leq M$, como Rm es finitamente genenerado, existe $A \leq Rm$ máximo y así Rm/A es simple. Por hipotesis $E(Rm/A) \subseteq C$. Además tenemos un morfismo $\alpha : Rm \to E(Rm/A)$ dado por la proyección canónica y la cápsula inyectiva. Como $E(Rm/A)$ es inyectivo, existe $g : M \to E(Rm/A)$ tal que $gi = \alpha$ y $g(m) \neq 0$. Tomemos $\varphi = jg$ donde j es la inclusión de $E(Rm/A)$ en C. Entonces $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, C)$ y $\varphi(m) \neq 0$ así que $m \notin \mathrm{Ker}\,\varphi$. Como esto pasa para todo $0 \neq m \in M$, $\bigcap \mathrm{Ker}\,\varphi = 0$ con $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, C)$. Por lo tanto C es cogenerador. $\square$

Observación 6.6.15. Si ${}_RS$ y ${}_RT$ son simples un morfismo $\varphi : S \to T$ es cero o es isomorfismo. Para $0 \neq s \in S$, tenemos el morfismo $\_ \cdot s : R \to S$ que es distinto de cero y suprayectivo ya que S es simple. Entonces $S \cong R/\mathrm{Ker}\,\_ \cdot s$. Esto implica que todo simple es isomorfo a un cociente del anillo y por lo tanto la colección de las clases de equivalencia de los módulos simples salvo isomorfismo, es un conjunto. Denotaremos por *R-simp* a un conjunto de representantes de módulos simples salvo isomorfismo.

Corolario 6.6.16. *El R-módulo* $\bigoplus_{R\text{-}simp} E(S)$ *es un cogenerador de R-Mod.*

Demostración. Directo del Teorema 6.6.14. □

Teorema 6.6.17. *Sea* C *un R-módulo. Entonces,* C *es un cogenerador si y sólo si* C *contiene una copia de* $\bigoplus_{R-simp} E(S)$.

Demostración. $\Rightarrow$. Por el Teorema 6.6.14, $E(S) \leq C$ para todo $S \in R$-Simp. Notemos que si $S \cap \sum_{S \neq T \in R-Simp} T \neq 0$ entonces, $S \cap \sum_{S \neq T \in R-Simp} T = S$. Esto implica que $T \leq S$ para cada $T \neq S$, lo que es una contradicción. Por lo tanto $\sum_{R-Simp} S = \bigoplus_{R-Simp} S$. Por la Proposición 6.1.7, tenemos $\bigoplus_{R-simp} E(S) \leq C$.

$\Leftarrow$. Por el Teorema 6.6.14 □

Ejemplo 6.6.18. En $\mathbb{Z}$-Mod, el grupo abeliano $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es un cogenerador inyectivo.

Teorema 6.6.19. *Sea* C *un R-módulo. Entonces,* C *un cogenerador si y solo si para un morfismo* $\alpha : A \to B$ *tal que* $\operatorname{Hom}_R(\alpha, C) : \operatorname{Hom}_R(B, C) \to \operatorname{Hom}_R(A, C)$ *es sobre se tiene que* α *es inyectivo.*

Demostración. $\Rightarrow$. Como C es cognerador, $0 = \bigcap\{\operatorname{Ker}\varphi \mid \varphi : A \to C\}$. Por hipótesis $\operatorname{Hom}_R(\alpha, C)$ es un epimorfismo, así que todo $\varphi : A \to C$ es de la forma $\psi\alpha$ para algún $\psi : B \to C$. Por lo tanto

$$0 = \bigcap\{\operatorname{Ker}\varphi \mid \varphi : A \to C\} = \bigcap\{\operatorname{Ker}\psi\alpha \mid \psi : B \to C\}$$

$$= \bigcap\{\alpha^{-1}(\operatorname{Ker}\psi) \mid \psi : B \to C\} \geq \operatorname{Ker}\alpha.$$

Por lo tanto α es inyectivo.

$\Leftarrow$. Sea M un R-módulo. Consideremos el producto $C^{\operatorname{Hom}_R(M,C)}$. Definimos $\alpha : M \to C^{\operatorname{Hom}_R(M,C)}$ como $\alpha(m) = (\varphi(m))_{\varphi \in \operatorname{Hom}_R(M,C)}$.

Sea $\psi : M \to C$ y consideremos la proyección $\pi_\psi : C^{\operatorname{Hom}_R(M,C)} \to C$. Entonces $\psi = \pi_\psi\alpha$, es decir, $\operatorname{Hom}_R(\alpha, C)$ es suprayectiva. Por hipóteis α es inyectiva. Por el Teorema 6.6.12 C es un cogenerador. □

Corolario 6.6.20. *Sea* Q *un cogenerador inyectivo y* $\alpha : A \to B$ *un morfismo. Entonces* α *es inyectiva si y solo si* $\operatorname{Hom}_R(\alpha, Q)$ *es suprayectiva.*

Demostración. $\Rightarrow$. Sea $\varphi : B \to Q$. Como Q es inyectivo, existe $\psi : A \to Q$ tal que $\varphi = \psi\alpha$.

$\Leftarrow$. Por el Teorema 6.6.19. □

Capítulo 7

Módulos Artinianos y Noetherianos

7.1. Módulos Artinianos y Noetherianos

Definición 7.1.1. Decimos que un módulo M es *Noetheriano* (resp. *Artiniano*) si todo subconjunto no vacío de submódulos de M tiene elementos máximos (resp. mínimos) con respecto a la inclusión. Decimos que un anillo R es *Noetheriano izquierdo* (resp. *Artiniano izquierdo*) si lo es como R-módulo.

Definición 7.1.2. Se dice que un módulo M satisface *la condicion de cadena ascendente (CCA)* (resp. *la condición de cadena descendente (CCD)*), si para toda cadena ascendente (resp. descendente) de submódulos $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq ...$ (resp. $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq ...$) tiene sólo un número finito de distintos A_i's, es decir, existe $n > 0$ tal que $A_n = A_{n+i}$ para todo $i > 0$.

Definición 7.1.3. Un módulo M es *finitamente cogenerado* (f.c.) si para toda familia $\{A_i\}_I$ de submódulos de M tales que $\bigcap_I A_i = 0$ entonces existe $I_0 \subseteq I$ I_0 finito tal que $\bigcap_{I_0} A_i = 0$.

Teorema 7.1.4. *Son equivalentes para un módulo M y $A \leq M$.*

(a) *M es Artiniano.*

(b) *A y M/A son Artinianos.*

(c) *M satisface CCD.*

(d) *Todo cociente de M es finitamente cogenerado.*

(e) *Para cada familia no vacía $\{A_i\}_I$ de submódulos de M, existe $J \subseteq I$ finito tal que $\bigcap_I A_i = \bigcap_J A_i$.*

Demostración. (a)$\Rightarrow$(b). Sea $\{A_i\}_I$ un familia de submódulos de A. En particular $\{A_i\}_I$ es una familia de submódulos de M, así que esta familia tiene mínimos. Por lo tanto A es Artiniano. Ahora si $\{A_i/A\}_I$ es una familia de submódulos de M/A, entonces $\{A_i\}_I$ es un familia de submódulos de M. Sea A_0 un mínimo de la familia $\{A_i\}_I$. Entonces, A_0/A es mínimo de la familia A_i/A. Por lo tanto M/A es Artiniano.

(b)⇒(c). Sea $A_1 \supseteq A_2 \supseteq ...$ una cadena descendente de submódulos de M. Tomemos las familias de submódulos $\{A_i \cap A\}_{\mathbb{N}}$ y $\{A_i + A\}_{\mathbb{N}}$. Por hipótesis, estas familias tienen un elemento mínimo, digamos $A_k \cap A$ y $A_l + A$. Sea $n = \text{máx}\{k, l\}$. Tenemos que

$$(A_1 \cap A) \supseteq ... \supseteq (A_k \cap A) = (A_{k+1} \cap A) = ...$$

y

$$(A_1 + A) \supseteq ... \supseteq (A_l + A) = (A_{l+1} + A) = ...$$

entonces $A_n = (A_n + A) \cap A_n = (A_{n+j} + A) \cap A_n = A_{n+j} + (A \cap A_n) = A_{n+j} + (A \cap A_{n+j}) = A_{n+j}$ para toda $j \in \mathbb{N}$.

(c)⇒(a). Si $\{A_i\}_I$ es una familia de submódulos de M sin elementos mínimos, entonces para toda $i \in I$ existe $j \in I$ tal que $A_i \supset A_j$. Si fijamos $i_0 \in I$, entonces existe una cadena $A_{i_0} \supset A_i \supset ...$ estrictamente descendente.

(d)⇒(e). Sea $\{A_i\}_I$ una familia de submódulos de M y $U = \bigcap_I A_i$. Por hipótesis M/U es f.c., así que existe un subconjunto finito $J \subseteq I$ tal que $\bigcap_I A_i = U = \bigcap_J A_i$.

(e)⇒(d). Consideremos la familia de submódulos $\{A_i \leq M \mid U \subseteq A_i\}_I$. Entonces $\bigcap_I A_i = U$. Así que existe un subconjunto finito $J \subseteq I$ tal que $\bigcap_J A_i = U$. Por lo tanto M/U es finitamente cogenerado.

(a)⇒(e). Sea $\{A_i\}_I$ una familia no vacía de submódulos de M. Tomemos $\{\bigcap_F A_i \mid F \subseteq I \text{ finito}\}$. Por hipótesis esta familia tiene mínimo, digamos $\bigcap_{F_0} A_i$. Para cada $j \in I$, $\bigcap_{F_0} A_i \cap A_j \subseteq \bigcap_{F_0} A_i$ lo que implica que $\bigcap_{F_0} A_i \cap A_j = \bigcap_{F_0} A_i$. Por lo tanto $A_j \supseteq \bigcap_{F_0} A_i$. Así $\bigcap_{F_0} A_i \subseteq \bigcap_I A_i$ y por lo tanto $\bigcap_{F_0} A_i = \bigcap_I A_i$.

(e)⇒(c). Sea $A_1 \supseteq A_2 \supseteq ...$ una cadena descendente de submódulos de M. Por hipótesis existe $F \subseteq \mathbb{N}$, finito tal que $\bigcap_{\mathbb{N}} A_i = \bigcap_F A_i$, es decir, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\bigcap_{i=1}^n A_i = \bigcap_I A_i$. Por lo tanto $A_n = A_{n+j}$ para toda $j \in \mathbb{N}$. □

Teorema 7.1.5. *Son equivalentes para un módulo M y $A \leq M$*

(a) *M es Noetheriano.*

(b) *A y M/A son Noetherianos.*

(c) *M satisface CCA.*

(d) *Todo submodulo de M es finitamente generado.*

(e) *Para toda familia $\{A_i\}_I$ de submódulos de M existe $J \subseteq I$ finito tal que $\sum_I A_i = \sum_J A_i$.*

Demostración. Es análoga a la prueba del Teorema 7.1.4. Se deja como ejercicio al lector. □

Corolario 7.1.6. 1. *Si M es una suma finita de módulos Noetherianos (resp. Artinianos) entonces M es Noetheriano (resp. Artiniano).*

2. *Si R es Noetheriano izq. (resp. Artiniano izq.) y ${}_RM$ es f.g. entonces ${}_RM$ es Noetheriano (resp. Artiniano).*

Demostración. Solo probaremos el caso Noetheriano. El caso Artiniano es análogo.

1. Supongamos que $M = \sum_{i=1}^{n} M_i$ con M_i Noetheriano. Haremos la prueba por inducción sobre n. El caso $n = 1$ es trivial. Supongamos que $n > 1$ y que el resultado es cierto para $k < n$. Por hipótesis de inducción $N = \sum_{i=1}^{n-1} M_i$ es Noetheriano. Tenemos que $M/M_n = (N + M_n)/M_n \cong N/(N \cap M_n)$. Como N es Noetheriano, $N/(N \cap M_n) \cong M/M_n$ también y como M_n es Noetheriano se tiene que M es Noetheriano.

2. Dado $0 \neq x \in M$ tenemos el morfismo $\_ \cdot x : R \to M$ y su imagen es $Rx \cong R/\operatorname{Ker} \_ \cdot x$. Como R es Noetheriano, Rx también lo es. Por lo tanto M es Noetheriano ya que $M = \sum_{i=1}^{n} Rx_i$. □

Teorema 7.1.7 (de la base de Hilbert)**.** *Si R es un anillo Noetheriano izquierdo entonces $R[x]$ es Noetheriano izquierdo.*

Demostración. Sea $0 \neq A$ un ideal izquierdo de $R[x]$ y

$$A_0 = \{a \in R \mid \exists f \in A \text{ tal que } a \text{ es el coeficiente principal de } f\}$$

(supongamos que 0 es el coef. prin. del polinomio cero). Entonces A_0 es un ideal izquierdo de R. Como R es Noetheriano A_0 es f.g. así que existen $c_1, ...c_k \in A_0$ tal que $A_0 = Rc_1 + ... + Rc_k$. Para cada $i \in \{1, ..., k\}$ sea $P_i(x) \in A$ tal que c_i es el coef. prin. de P_i y sea $B = \sum_{i=1}^{k} R[x]P_i \subseteq A$. Multiplicando por potencias de x podemos suponer que los P_i tienen grado n. Afirmamos que para cada $f \in A$, $f = g + h$ donde $g \in B$ y $h = 0$ o $gr(h) \leq n$. Si $f = 0$ o $gr(f) \leq n$. Entonces $f = 0 + f$. Supongamos que $n < gr(f) = t$. Si b es el coef. prin. de f, entonces $b \in A_0$ por lo que existen $r_1, ..., r_k \in R$ tal que $b = r_1c_1 + ... + r_kc_k$. Sea $h_1 = f - x^{t-n} \sum_{i=1}^{k} r_iP_i$ y $g_1 = x^{t-n} \sum_{i=1}^{k} r_iP_i$ entonces $h_1 = 0$ o $gr(h_1) < t$ y $f = g_1 + h_1$. Si $gr(h_1) > n$ podemos aplicar el mismo procedimiento a h_1 obteniendo $h_1 = g_2 + h_2$ con $g_2 \in B$, y $f = (g_1 + g_2) + h_2$. En a lo más $t - n$ pasos tenemos que $f = g + h$ con $g \in B$ y $gr(h) \leq n$ o $h = 0$.

Tenemos que $h = f - g \in A \cap (R + Rx^1 + ... + Rx^n)$. Por otro lado, $R + Rx^1 + ... + Rx^n$ es f.g. como R-modulo, por lo tanto es Noetheriano. Así que $A \cap (R + Rx^1 + ... + Rx^n)$ es f.g.como R-modulo. Entonces $A \cap (R + Rx^1 + ... + Rx^n) = \sum_{j=1}^{l} RQ_j$ con $Q_j \in A$. Se sigue que $A \subseteq B + \sum_{j=1}^{l} RQ_j \subseteq B + \sum_{j=1}^{l} R[x]Q_j \subseteq A$. Por lo tanto A es f.g. y así $R[x]$ es Noetheriano izquierdo. □

Definición 7.1.8.

1. Sea $0 = A_0 \subseteq A_1 \subseteq ... \subseteq A_k = M$ una cadena finita en M. Decimos que la *longitud* de la cadena es k.
2. Sea $0 = A_0 \subseteq A_1 \subseteq ... \subseteq A_k = M$ una cadena en M. Un *refinamiento* de esta cadena es un cadena $0 = B_0 \subseteq B_1 \subseteq ... \subseteq B_l = M$ con $k \leq l$ tal que cada $A_i = B_j$ para algún $1 \leq j \leq l$.
3. Si $\mathcal{A} : 0 = A_0 \subseteq A_1 \subseteq ... \subseteq A_k = M$ es una cadena, los *cocientes de* $\mathcal{A}$ son los cocientes A_i/A_{i-1}.
4. Decimos que dos cadenas en M, $\mathcal{A}$ con conjunto de indices I y $\mathcal{B}$ con conjunto de indices J, son *isomorfas* si existe una biyección δ entre los conjuntos de indices tal que $A_i/A_{i-1} \cong B_{\delta(i)}/B_{\delta(i)-1}$.
5. Una cadena finita $\mathcal{C}$ en M se llama *serie de composición* si cada cociente de $\mathcal{C}$ es simple.

6. Decimos que M tiene *longitud finita*, si tiene una serie de composición.

Teorema 7.1.9 (Jordan-Hölder-Schreier). *Cualesquiera dos cadenas en M tienen refinamientos isomorfos.*

Demostración. Tomemos dos cadenas $0 = B_0 \subseteq B_1 \subseteq ... \subseteq B_k = M$ y $0 = C_0 \subseteq C_1 \subseteq ... \subseteq C_l = M$. Para cada $1 \leq j \leq l$ definimos, $B_{ij} = B_i + (B_{i+1} \cap C_j)$. Así $B_i \subseteq B_{ij} \subseteq B_{i+1}$. Entonces $B_i = B_{i0}$ y $B_{i+1} = B_{il}$. Análogamente $C_{ij} = C_j + (C_{j+1} \cap B_i)$. Usando el lema de Zassenhause 3.2.7, tenemos que

$$\frac{B_{ij+1}}{B_{ij}} = \frac{B_i + (B_{i+1} \cap C_{j+1})}{B_i + (B_{i+1} \cap C_j)} \cong \frac{C_j + (C_{j+1} \cap B_{i+1})}{C_j + (C_{j+1} \cap B_i)} = \frac{C_{i+1j}}{C_{ij}}.$$

Como en estos kl isomorfismos aparecen precisamente los kl terminos de los refinamientos, tenemos que los refinamientos son isomorfos. □

Corolario 7.1.10. *Sea M un módulo de longitud finita. Entonces*

1. *Toda cadena $\mathcal{B} : 0 = B_0 \subset B_1 \subset ... \subset B_k = M$ puede ser refinada a una serie de composición.*

2. *Cualesquiera dos series de composición de M son isomorfas.*

Demostración. 1. Por hipótesis existe una serie de composición $\mathcal{C}$ de M. Por el Teorema de Jordan-Hölder-Schreier (Teorema 7.1.9) $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ tienen refinamientos isomorfos, digamos $\mathcal{B}^*$ y $\mathcal{C}^*$. Como $\mathcal{C}$ es serie de composición, sólo se refina trivialmente. Quitando los factores repetidos de $\mathcal{C}^*$ y los respectivos de $\mathcal{B}^*$ se tiene un refinamiento $\mathcal{B}^{\text{o}}$ isomorfo a $\mathcal{C}$. Como $\mathcal{C}$ es serie de composición, $\mathcal{B}^{\text{o}}$ también.

2. Tomando la notación anterior tenemos que $\mathcal{B}^{\text{o}} \cong \mathcal{C}$ pero ahora estamos suponiendo que $\mathcal{B}$ es serie de descomposición así que $\mathcal{B} = \mathcal{B}^{\text{o}}$. Por lo tanto $\mathcal{B} \cong \mathcal{C}$. □

Teorema 7.1.11. *Sea M un módulo. Entonces, M es de longitud finita si y sólo si M es Artiniano y Noetheriano.*

Demostración. $\Rightarrow$. Sea $\mathcal{C}$ un serie de composición de M de longitud l. Sea $A_1 \subseteq A_2 \subseteq ...$ una cadena ascendente de submódulos de M. Si esta cadena tubiera mas de $l+1$ factores distintos tendriamos una cadena $A_{i_1} \subset A_{i_2} \subset ... \subset A_{i_{l+1}}$ que no es posible por el Corolario 7.1.10. Así que la cadena se estaciona. Por lo tanto M es Noetheriano. Analogamente M es Artiniano.

$\Leftarrow$. Por el Teorema 7.1.5, M es Noetheriano si y sólo si todo submodulo es finitamente generado. Entonces todo submódulo de M tiene máximos. Por lo tanto existe una cadena $M = M \supset M_1 \supset M_2 \supset ...$ tal que M_i es máximo en M_{i-1}. Como M es Artiniano, la cadena se estaciona lo que nos da una serie de composición de M. □

Teorema 7.1.12. *Sean M un módulo y $\varphi \in \operatorname{End}_R(M)$:*

1. *Si M es Artiniano, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$*

$$M = \operatorname{Im} \varphi^n + \operatorname{Ker} \varphi^n.$$

2. *Si M es Artiniano y φ monomorfismo, entonces φ es isomorfismo.*

3. *Si M es Noetheriano, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$*
$$0 = \operatorname{Ker}\varphi^n \cap \operatorname{Im}\varphi^n.$$

4. *Si M es Noetheriano y φ epimorfismo entonces φ es isomorfismo.*

5. *Si M es de longitud finita, entonces existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$*
$$M = \operatorname{Ker}\varphi^n \oplus \operatorname{Im}\varphi^n.$$

Demostración. 1. Tenemos la cadena descendente $\operatorname{Im}\varphi \supseteq \operatorname{Im}\varphi^2 \supseteq ...$ Como M es Artiniano, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{Im}\varphi^{n_0} = \operatorname{Im}\varphi^n$ para todo $n \geq n_0$. Sean $x \in M$ y $\varphi^n(x) \in \operatorname{Im}\varphi^n = \operatorname{Im}\varphi^{2n}$. Entonces existe $y \in M$ tal que $\varphi^n(x - \varphi^n(y)) = 0$. Sea $k = x - \varphi^n(y)$. Entonces $k \in \operatorname{Ker}\varphi^n$. Por lo tanto $x = \varphi^n(y) + k$.

2. Por el inciso anterior, existe $n > 0$ tal que $M = \operatorname{Im}\varphi^n + \operatorname{Ker}\varphi^n$. Como φ es monomorfismo, φ^n también. Lo que implica que $\operatorname{Ker}\varphi^n = 0$. Entonces φ^n es suprayectiva. Como $\operatorname{Im}\varphi^n \subseteq \operatorname{Im}\varphi$ tenemos que φ es un epimorfismo. Por lo tanto φ es un isomorfismo.

3. Tenemos la cadena ascendente $\operatorname{Ker}\varphi \subseteq \operatorname{Ker}\varphi^2 \subseteq ...$ Como M es Noetheriano, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{Ker}\varphi^{n_0} = \operatorname{Ker}\varphi^n$ para todo $n \geq n_0$. Sea $x \in \operatorname{Ker}\varphi^n \cap \operatorname{Im}\varphi^n$. Entonces $x = \varphi^n(y)$ para algún $y \in M$ y $0 = \varphi^n(x) = \varphi^{2n}(y)$. Esto implica que $y \in \operatorname{Ker}\varphi^{2n} = \operatorname{Ker}\varphi^n$. Por lo tanto $\varphi^n(y) = x = 0$.

4. Por el inciso anterior, existe $n > 0$ tal que $0 = \operatorname{Ker}\varphi^n \cap \operatorname{Im}\varphi^n$. Como φ es epimorfismo, φ^n también. Así, $\operatorname{Im}\varphi^n = M$ y por lo tanto $\operatorname{Ker}\varphi^n = 0$. Entonces $\operatorname{Ker}\varphi = 0$. Por lo tanto φ es un isomorfismo.

5. Se sigue de (*1*) y (*3*). □

Corolario 7.1.13. *Sea M un módulo de longitud finita. Las siguientes condiciones son equivalentes para $\varphi \in \operatorname{End}_R(M)$:*

(a) *φ es isomorfismo.*

(b) *φ es monomorfismo.*

(c) *φ es epimorfismo*

Demostración. (a)⇔(b) Se sigue del Teorema 7.1.12.*2*, y (a)⇔(c) se sigue del Teorema 7.1.12.*4*. □

Teorema 7.1.14. *Las siguientes condiciones son equivalentes para un anillo R:*

(a) *R es Noetheriano izquierdo.*

(b) *Para cada familia $\{Q_i\}_I$ de R-módulos inyectivos, se tiene que $\bigoplus_I Q_i$ es inyectivo.*

(c) *Para cada familia numerable $\{E(S_i)\}_{\mathbb{N}}$ de cápsulas inyectivas de simples, se tiene que $\bigoplus_{\mathbb{N}} E(S_i)$ es inyectivo.*

Demostración. (a)⇒(b). Denotemos $Q = \bigoplus_I Q_i$. Sean $A \leq R$ y $f : A \to Q$ un morfismo. Como R es Noetheriano, A es f.g. Así que existen $\{u_1, ..., u_n\} \subseteq A$ tales que $A = \sum_{j=1}^n Ru_j$. Para cada $j \in \{1, ..., n\}$, $f(u_j) \in \bigoplus_{I_j} Q_i$ donde I_j es un subconjunto finito de I. Si $I_0 = \bigcup_{j=1}^n I_j$ entonces $f(a) \in \bigoplus_{I_0} Q_i$ para toda

$a \in A$. Como $\bigoplus_{I_0} Q_i$ es inyectivo y es un sumando directo de Q, f se extiende a R.

(b)$\Rightarrow$(c). Es inmediato.

3 $\Rightarrow$ 1. Supongamos que R no es Noetheriano izquierdo, entonces existe una cadena propia ascendente $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ de ideales izquierdos de R. Sea $A = \bigcup_{\mathbb{N}} A_i$ que es un ideal de R. Notemos que para cada $a \in R$, existe $n_a \in \mathbb{N}$ mínimo tal que $a \in A_{n_a}$. Sean $i \in \mathbb{N}$ y $c_i \in A - A_i$. Tomemos $(Rc_i + A_i)/A_i \cong Rc_i/(Rc_i \cap A_i)$ que es un cociente de Rc_i. Entonces $(Rc_i + A_i)/A_i$ es cíclico, lo que implica que tiene máximos. Sea N_i/A_i un máximo. Entonces $S_i = \frac{(Rc_i+A_i)/A_i}{N_i/A_i}$ es simple. Notemos que $c_i \notin N_i$ así que $c_i + A_i$ no es cero en S_i. Consideremos $E(S_i)$ y sean ι_i la inclusión de S_i en $E(S_i)$, j_i la inclusión de $(Rc_i + A_i)/A_i$ en A/A_i y π_i la proyección de $(Rc_i + A_i)/A_i$ en S_i. Entonces existe $\eta_i : A/A_i \to E(S_i)$ tal que $\eta_i j_i = \iota_i \pi_i$ con $\eta_i(c_i + A_i) \neq 0$. Definimos $\alpha : A \to \bigoplus_{\mathbb{N}} E(S_i)$ como $\alpha(a) = \sum_{i=1}^{n_a} \eta_i(a + A_i)$. Por hipótesis, existe $\beta : R \to \bigoplus_{\mathbb{N}} E(S_i)$ tal que $\beta|_A = \alpha$. Sea b_i la i-esima componente de $\beta(1)$. Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $b_i = 0$ para $i \geq n$. Sea $a \in A$. Como $\sum^{n_a} \eta_i(a + A_i) = \alpha(a) = \beta(a) = a\beta(1)$, $\eta_i(a + A_i) = 0$ para $i \geq n$ y para toda $a \in A$ pero $\eta_n(c_n + A_n) \neq 0$. Contradicción. Por lo tanto R es Noetheriano izquierdo. $\square$

7.2. Descomposición de Módulos Inyectivos sobre Anillos Noetherianos y Artinianos

Definición 7.2.1. Sea M un módulo.

1. Se dice que M es *inescindible* si $M \neq 0$ y siempre que $M = U \oplus V$ se tiene que $U = 0$ o $V = 0$.
2. Decimos que M es *uniforme* si $M \neq 0$ y todo submódulo no cero de M es esencial.

Note que todo módulo uniforme es inescindible pero no al revés. Para esto considere el siguiente ejemplo:

Ejemplo 7.2.2. Tomemos el anillo $\mathbb{Z}_2$ y sea R el anillo $R = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_2 & \mathbb{Z}_2 & 0 \\ 0 & \mathbb{Z}_2 & 0 \\ 0 & \mathbb{Z}_2 & \mathbb{Z}_2 \end{pmatrix}$ el cual tiene 32 elementos. Cosideremos el idempotente $e = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in R$ y sea $M = Re$. Entonces M tiene la forma

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Z}_2 & 0 \\ 0 & \mathbb{Z}_2 & 0 \\ 0 & \mathbb{Z}_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Este módulo tiene 8 elementos y tiene 3 submódulos propios distintos de cero:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Z}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{Z}_2 & 0 \end{pmatrix} \ \text{ and } \ C = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Z}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{Z}_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Como M tiene un único submódulo máximo, M es inescindible, pero $A \cap B = 0$ lo que implica que M no es uniforme.

Proposición 7.2.3. *Sea Q inyectivo. Son equivalentes:*

(a) *Q es uniforme.*

(b) *Q es inescindible.*

(c) *Q es la cápsula inyectiva de cada uno de sus submódulos distintos de cero.*

(d) *Todo submodulo distinto de cero de Q es uniforme.*

(e) *Q es la cápsula inyectiva de un submodulo uniforme.*

Demostración. (a)$\Rightarrow$(b). Es clara.

(b)$\Rightarrow$(c). Sea $0 \neq M \leq Q$ entonces $E(M)$ es un sumando directo de Q pero Q es inescindible. Por lo tanto $E(M) = Q$.

(c)$\Rightarrow$(d). Sea $0 \neq M \leq Q$ y $0 \neq A, B \leq M$. Por hipótesis $A \leq_e Q$, lo que implica que $A \cap B \neq 0$. Por lo tanto M es uniforme.

(d)$\Rightarrow$(e). $E(Q) = Q$.

(e)$\Rightarrow$(a). Sea $M \leq Q$ uniforme tal que $E(M) = Q$. Sean $0 \neq A, B \leq Q$, como $M \leq_e Q$ tenemos que $0 \neq M \cap A$ y $0 \neq M \cap B$, además M es uniforme entonces $(M \cap A) \cap (M \cap B) \neq 0$ así que $A \cap B \neq 0$. Por lo tanto Q es uniforme. □

Corolario 7.2.4. *1. La cápsula inyectiva de un simple es inescindible.*

2. Un módulo inyectivo Q inescindible contiene a lo más un módulo simple.

3. Si R es Artiniano entonces todo modulo inyectivo Q que sea inescindible es la cápsula inyectiva de un simple.

Demostración. 1. Si S es simple entonces S es uniforme lo que implica que $E(S)$ es inescindible.

2. Si $S_1, S_2 \leq Q$ son simples, por la Proposición 7.2.3, $E(S_1) = E(S_2) = Q$ lo que implica que $S_1 \leq_e Q$ y $S_2 \leq_e Q$ y así $S_1 \cap S_2 = S_1 = S_2$.

3. Dado $0 \neq q \in Q$, Rq es f.g., como R es Artiniano Rq es Artiniano entonces existe $S \leq Rq$ simple. Como Q es inescindible, $E(S) = Q$. □

Lema 7.2.5. *Si R es un anillo Noetheriano izq. entonces cada R-módulo $M \neq 0$ contiene un submódulo uniforme distinto de cero.*

Demostración. Sea $0 \neq M$. Podemos tomar $0 \neq B \leq M$ f.g.. Entonces B es Noetheriano. Sea $\Gamma = \{0 \neq X < B \mid X \text{ p.c. en } B\}$. Si Γ es vacío entonces B es uniforme. Supongamos que B no es uniforme, entonces Γ es no vacío. Con la inclusión, Γ es un COPO. Como B es Noetheriano, Γ tiene máximos. Sea X_0 un máximo en Γ y supongamos que es p.c. de U_0 en B.
Afirmamos que U_0 es uniforme. Sea $0 \neq U \leq U_0$ y $L \leq U_0$ tal que $L \cap U = 0$ entonces $U \cap (X_0 + L) = 0$. Si tomamos U' un p.c. de U en B tal que $X_0 + L \subseteq U'$ tenemos que $X_0 \subseteq U' \in \Gamma$ pero X_0 es máximo, así que $U' = X_0$. Esto implica que $L = 0$. Por lo tanto $U \leq_e U_0$ y entonces U_0 es uniforme. □

Proposición 7.2.6. *Si R es Noetheriano izquierdo entonces todo R-módulo inyectivo Q, es suma directa de módulos inyectivos inescindibles. Además si R es Artiniano entonces cada uno de los sumandos es la cápsula inyectiva de un simple.*

Demostración. Sea R Noetheriano izquierdo y Q un R-módulo inyectivo. Por el Lema 7.2.5, podemos tomar una familia máxima de submódulos inyectivos e inescindibles de Q tal que su suma sea directa. Denotemos Q_0 a tal suma. Como R es Noetheriano izquierdo, Q_0 es inyectivo. Por lo tanto $Q = Q_0 \oplus Q_1$. Si $Q_1 \neq 0$, entonces existe $0 \neq N \leq Q_1$ uniforme. Así $Q_1 = E(N) \oplus Q_2$ y $E(N)$ es inyectivo e inescindible, así que $Q = (Q_0 \oplus E(N)) \oplus Q_2$ pero $Q_0 \oplus E(N)$ contradice la maximalidad de Q_0. Por lo tanto $Q_1 = 0$ y $Q = Q_0$.
Si además R es Artiniano aplicamos el corolario 7.2.4.*3* □

Proposición 7.2.7. *En $\mathbb{Z}$-Mod, los inyectivos inescindibles, hasta isomorfismo, son $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ con p un número primo.*

Demostración. Sea Q un $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo e inescindible. Por el Corolario 7.2.4, Q contiene a lo más un simple. Si S es un simple contenido en Q, entonce $E(S) = Q$. Como S es simple, $S \cong \mathbb{Z}_p$ para algún primo p. Por lo tanto $Q \cong \mathbb{Z}_{p^\infty}$. Si Q no contiene submódulos simples, entonces existe $q \in Q$ de orden infinito. Por lo tanto $\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}q \leq Q$. Por la Proposición 7.2.3, $Q = E(\mathbb{Z}q)$. Por lo tanto, $Q \cong \mathbb{Q}$. □

Corolario 7.2.8. *Todo módulo inyectivo en $\mathbb{Z}$-Mod es de la forma*

$$\mathbb{Q}^{(X)} \oplus \bigoplus_{p>0} \mathbb{Z}_{p^\infty}^{(Y_p)}$$

donde X y Y_p son conjuntos (posiblemente vacios).

Capítulo 8

Anillos Locales

8.1. Anillos Locales

Teorema 8.1.1. *Sea R un anillo y $A \subseteq R$ el subconjunto de elementos de R que no tienen inverso multiplicativo. Son equivalentes:*

(a) *A es cerrado bajo suma.*

(b) *A es un ideal bilateral de R.*

(c) *A es el mayor ideal izquierdeo (resp. der.) propio de R.*

(d) *En R existe un mayor ideal izquierdo (resp. der.) propio.*

(e) *r o $1-r$ tiene inverso izquierdo (resp. der.) para todo $r \in R$.*

(f) *r o $1-r$ tiene inverso para todo $r \in R$.*

Demostración. (a)⇒(b). Veamos que si un elemento de R tiene inverso por un lado entonces tiene inverso. Sean $b, b' \in R$ tales que $bb' = 1$. Supongamos que $b'b \in A$. Si $1 - b'b \in A$ entonces $b'b + 1 - b'b \in A$ lo que implica que $1 \in A$. Contradicción. Por lo tanto $1 - b'b \notin A$. Entonces existe $s \in R$ tal que $1 = s(1-b'b) = s - sb'b$. Así $b' = sb' - sb'(bb') = sb' - sb'$ y por lo tanto $b' = 0$ lo que implica que $1 = 0$. Contradicción. Así que $b'b$ tiene inverso, es decir, existe $t \in R$ tal que $b'bt = 1$. Se sigue que $b = bb'bt = bt$. Por lo tanto $b'b = b'bt = 1$.

Ahora sea $a \in A$ y $r \in R$, si $ar \notin A$ entonces existe $s \in A$ tal que $ars = 1$ por lo tanto a tiene inverso por la derecha. Por lo anterior a tiene inverso, así que $a \notin A$. Contradicción. Por lo tanto $ar \in A$. Análogamente $ra \in A$. Por lo tanto A es un ideal bilateral de R.

(b)⇒(c). Sea $B < R$ un ideal izquierdo de R. Entonces $Rb \leq B < R$ para todo $b \in B$, así que b no tiene inverso por la izquierda , en particular no tiene inverso lo que implica que $b \in A$. Por lo tanto $B \subseteq A$. Análogamente por la derecha.

(c)⇒(d). Es claro.

(d)⇒(e). Sea B el mayor ideal izquierdo de R y $r \in R$. Supongamos que ni r ni $1-r$ tienen inverso izquierdo. Entonces Rr y $R(1-r)$ son propios y así $Rr \subseteq B$ y $R(1-r) \subseteq B$. Esto implica que $Rr + R(1-r) \subseteq B$ pero $1 \in Rr + R(1-r)$. Por lo tanto $Rr + R(1-r) = R \subseteq B$. Contradicción.

(e)$\Rightarrow$(f). Sea $b \in R$ tal que $b'b = 1$ para algún $b' \in R$. Si $1 - bb'$ tiene inverso izq. entonces existe $s \in R$ tal que $1 = s(1 - bb') = s - sbb'$ y así $b = sb - sbb'b = b = 0$. Contradicción. Si bb' tiene inverso izquierdo, existe $s \in R$ tal que $sbb' = 1$ lo que implica $b = sbb'b = sb$ y así $1 = sbb' = bb'$. Por lo tanto b tiene inverso.

(f)$\Rightarrow$(a). Sean $a, b \in A$ y supongamos que $a + b \notin A$ entonces existe $s \in R$ tal que $(a + b)s = 1 = as + bs$. Note que con la hipótesis que tenemos podemos ver que si $a \in A$ y $r \in R$ entonces $ar \in R$ como en (a)$\Rightarrow$(b). Entonces $as, bs \in A$ y por lo tanto $as = 1 - bs \in A$ pero $1 - bs$ tiene inverso. Contradicción. □

Definición 8.1.2. Un anillo R se llama *local* si satisface cualquiera de las condiciones del Teorema 8.1.1.

Observación 8.1.3. Si R es local y A es su mayor ideal entonces:

1. R/A es un anillo con división.
2. Todo elemento de R que tenga inverso por un lado tiene inverso.
3. Si $\varphi : R \to S$ es un morfismo de anillos suprayectivo con R local entonces S es local.

Demostración. 1 y *2* son claras.

3. Sea $\varphi : R \to S$ un morfismo de anillos suprayectivo con R local y sea $s \in S$. Entonces existe $r \in R$ tal que $\varphi(r) = s$ y $\varphi(1 - r) = \varphi(1) - \varphi(r) = 1 - s$. Por hipótesis r o $1 - r$ tiene inverso. Si $1 - r$ tiene inverso, digamos t, entonces $1 = \varphi((1 - r)t) = \varphi(1 - r)\varphi(t) = (1 - s)\varphi(t)$ por lo tanto $1 - s$ tiene inverso. Análogamente si r tiene inverso. □

Definición 8.1.4. Sea R un anillo y $r \in R$.

1. r se llama *nilpotente* si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $r^n = 0$.
2. e se llama *idempotente* si $e^2 = e$.

Proposición 8.1.5. *1. Si r es nilpotente entonces r no tiene inverso pero $1 - r$ sí.*

2. Si e es idempotente entonces $1 - e$ también.

3. Si e es idempotente y tiene inverso entonces $e = 1$.

4. Si e es idempotente entonces eRe es un anillo asociativo con uno.

5. Si e es idempotente entonces $eRe \cong \mathrm{End}_R(Re)^{op}$ como anillos.

Demostración. 1. Sea r nilpotente y n el menor natural tal que $r^n = 0$. Si r tiene inverso s, entonces $0 = r^n s = r^{n-1}(rs) = r^{n-1}$. Contradicción. Por otra parte $1 = 1 - r^n = (1 - r)(1 + r + r^2 + ... + r^{n-1})$. Por lo tanto $1 - r$ tiene inverso.

2. Supongamos que $e \in R$ es idempotente. Entonces $(1 - e)(1 - e) = 1 - e - (1 - e)e = 1 - e - e + e^2 = 1 - e - e + e = 1 - e$.

3. Sea $e \in R$ idempotente. Si $es = 1$ para algún $s \in R$ entonces $e = ees = es = 1$.

4. Sea $e \in R$ idempotente. Solo hay que notar que $(eae)(ete) = eaete \in eRe$. Además $e(eae) = eae$, así que el uno de eRe es e.

5. Sea $e \in R$ un idempotente. Un elemento $eae \in eRe$, define un morfismo $(\_ \cdot eae) : Re \to Re$. Por otro lado, dado $\varphi : Re \to Re$, $\varphi(re) = r\varphi(e)$. Esto implica que φ queda determinado por su valor en e. Note que $\varphi(e) = \varphi(e^2) = e\varphi(e) \in eRe$. Estas asignaciones definen un isomorphismo de anillos que invirte el producto.

$\square$

Proposición 8.1.6. *1. Sea R un anillo y spongamos que ${}_RR = \bigoplus_I A_i$ con $A_i \leq {}_RR$. Entonces:*

(I) *Existe un subconjunto finito I_0 de I tal que ${}_RR = \bigoplus_{I_0} A_j$.*

(II) *Existen elementos $e_i \in A_i$ con $i \in I_0$ tales que para todo $i, j \in I_0$ se tiene que $A_i = Re_i$, $\sum_{I_0} e_i = 1$ y $e_ie_j = \begin{cases} e_i & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$.*

En éste caso decimos que el conjunto de los $e_i's$ es de idempotentes ortogonales.

(III) *Si cada A_i es bilateral entonces los $e_i's$ están en el centro de R. En este caso cada A_i es un anillo con uno.*

2. Si $e_1, ..., e_n \in R$ son idempotentes ortogonales tal que $\sum e_i = 1$ entonces ${}_RR = \bigoplus Re_i$. Si además los $e_i's$ son centrales entonces cada Re_i es bilateral.

Demostración. 1.(I). Si ${}_RR = \bigoplus_I A_i$ entonces $1 = e_{i_1} + ... + e_{i_n}$ con $e_{i_j} \in A_{i_j}$ distintos de cero, así que para todo $r \in R$ $r = re_{i_1} + ... + re_{i_n}$ por lo tanto $r \in \sum_{j=1}^n A_{i_j}$. Entonces $R = \bigoplus_{j=1}^n A_{i_j}$.

(II). Tenemos que $1 = e_1 + ... + e_n$ con $e_i \in A_i$. Multiplicando por e_j, se tiene que $e_j = e_1e_j + ... + e_ne_j$. Así,

$$0 = e_j - e_je_j = e_1e_j + ... + e_{j-1}e_j + e_{j+1}e_j + ... + e_ne_j.$$

Como cada $e_ie_j \in A_i$ y la suma es directa, cada sumando tiene que ser cero, es decir, $e_ie_j = \begin{cases} e_i & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$. Ahora, si $a_j \in A_j$ entonces $a_j = a_je_1 + ... + a_je_n = a_je_j$ así que $A_j \subseteq A_je_j \subseteq Re_j \subseteq A_j$. Por lo tanto $A_j = Re_j$.

(III). Sea $r \in R$, tenemos que $r = \sum re_j = \sum e_jr$. Como A_j es bilateral $re_j, e_jr \in A_j$. Lo que implica que $re_j = e_jr$. Por otro lado, si e_i es central, entonces $Re_i = e_iRe_i$ que es un anillo con unidad.

2. Como $1 = \sum e_i$, para todo $r \in R$, $r = \sum re_i \in \sum Re_i$. Así que ${}_RR = \sum Re_i$. Supongamos que $r \in Re_i \cap \sum_{i \neq j} Re_j$ entonces $r = r_ie_i = \sum_{i \neq j} r_je_j$ lo que implica que $re_i = re_ie_i = \sum_{i \neq j} r_je_je_i$. Como los $e_i's$ son idempotentes ortgonales $r = re_i = 0$. Por lo tanto $\bigoplus Re_i =_R R$. Si cada e_i es central $(Re_i)r = Rre_i \subseteq Re_i$. Por lo tanto Re_i es ideal derecho.

$\square$

Corolario 8.1.7. *Son equivalentes para un anillo R:*

(a) *${}_RR$ es inescindible.*

(b) R_R *es inescindible.*

(c) 0 *y* 1 *son los únicos idempotentes de* R.

Demostración. (a)$\Rightarrow$(c). Si $e \in R$ es idempotente entonces $R = Re \oplus R(1-e)$ lo que implica que $Re = 0$ o $Re = R$. Por lo tanto $e = 0$ o $e = 1$.

(c)$\Rightarrow$(a). Si ${}_RR = A \oplus B$ entonces $A = Re$ para algún e idempotente, así que $A = 0$ o $A = R$.

La equivalencia $(b) \Leftrightarrow (c)$ análoga. □

8.2. Anillos de Endomorfismos

Lema 8.2.1. *Sea* M *un* R*-módulo. Si* e *es un idempotente de* $\mathrm{End}_R(M)$ *entonces* $M = e(M) \oplus (1-e)(M)$.

Demostración. Para todo $m \in M$, $m = e(m) + m - e(m) = e(m) + (1-e)(m)$ así que $M = e(M) + (1-e)(M)$. Si $e(m_1) = (1-e)(m_2)$ tenemos que $0 = e(m_1) - m_2 + e(m_2)$ y $0 = e(0) = ee(m_1) - e(m_2) + ee(m_2) = e(m_1)$. Por lo tanto $M = e(M) \oplus (1-e)(M)$. □

Teorema 8.2.2. *Sea* M *un módulo y* $S = \mathrm{End}_R(M)$. *Son equivalentes:*

(a) M *es inescindible.*

(b) ${}_SS$ *es inescindible.*

(c) S_S *es inescindible.*

(d) 0 *y* 1 *son los únicos idempotentes de* S

Demostración. (a)$\Rightarrow$(d). Sea $e \in S$ un idempotente entonces $M = e(M) \oplus (1-e)(M)$ pero M es inescindible así que $e(M) = 0$ o $(1-e)(M) = 0$. Si $e(M) = 0$, entonces $e = 0$. Si $(1-e)(M) = 0$ entonces para todo $m \in M$ $0 = m - e(m)$ lo que implica que $e(m) = m$ para todo $m \in M$, es decir, $e = 1$.

(d)$\Rightarrow$(a). Supongamos que $M = A \oplus B$ y tomamos $\eta \in S$ definida como $\eta(a + b) = a$. Entonces η es idempotente. Por hipótesis $\eta = 0$ o $\eta = 1$, lo que implica que $A = 0$ o $B = 0$.

Las demás equivalencias son el Corolario 8.1.7. □

Observación 8.2.3. Notemos que por la Observacion 3.4.10, éste Teorema implica el Corolario 8.1.7.

Proposición 8.2.4. *Sea* M *un módulo y* $S = \mathrm{End}_R(M)$. *Si* S *es local entonces* M *es inescindible.*

Demostración. Sea $e \in S$. Como S es local entonces e o $1 - e$ tiene inverso. Por la Observación 8.1.5.(3) $e = 1$ o $1 - e = 1$. □

Corolario 8.2.5. *Si* R *es local entonces es inescindible.*

Demostración. Tenemos que $R \cong \mathrm{End}_R(R)^{op}$. Por la Proposición 8.2.4 R es inescindible. □

Observación 8.2.6. Notemos que el reciproco del Corolario anterior no es valido. Para esto, considere $\mathbb{Z}$ que es uniforme y por lo tanto inescindible pero $\operatorname{End}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{op}$ que no es local.

Entonces ¿Bajo que condiciones un módulo inescindible tiene anillo de endomorfismos local?

Teorema 8.2.7. *Sea M un módulo inescindible y de longitud finita. Entonces $\operatorname{End}_R(M)$ es local y los elementos no invertibles $\operatorname{End}(M)$ son exactamente los elementos nilpotentes.*

Demostración. Sea $\varphi \in \operatorname{End}_R(M)$. Por el Teorema 7.1.12, como M es de longitud de finita, $M = \operatorname{Im}\varphi^n \oplus \operatorname{Ker}\varphi^n$ par algún $n \in \mathbb{N}$. Al ser M es inescindible, $\operatorname{Im}\varphi^n = 0$ o $\operatorname{Ker}\varphi^n = 0$.

Si $\operatorname{Ker}\varphi^n = 0$ entonces $\operatorname{Ker}\varphi = 0$ lo que implica que φ es monomorfismo y como M es de longitud finita φ es un isomorfismo. Si $\operatorname{Im}\varphi^n = 0$ entonces $\varphi^n = 0$ así que φ es nilpotente lo que implica que $1 - \varphi$ es isomorfismo. □

Teorema 8.2.8. *Sea $Q \neq 0$ inyectivo e inescindible entonces $\operatorname{End}_R(Q)$ es local.*

Demostración. Si $\varphi \in \operatorname{End}(Q)$ es monomorfismo entonces $\varphi(Q) \neq 0$ es sumando directo de Q pero Q es inescindible, entonces $\varphi(Q) = Q$. Por lo tanto φ es isomorfismo.

Sean $\varphi, \psi \in \operatorname{End}(Q)$ no invertibles, entonces no son monomorfismos, por lo tanto $\operatorname{Ker}\varphi \neq 0 \neq \operatorname{Ker}\psi$. Como Q es inyectivo e inescindible, por la Proposición 7.2.3, Q es uniforme. Esto implica que $\operatorname{Ker}\varphi \cap \operatorname{Ker}\psi \neq 0$ y así $\operatorname{Ker}(\varphi + \psi) \neq 0$. Por lo tanto $\varphi + \psi$ no es invertible. Por el Teorema 8.1.1, $\operatorname{End}_R(Q)$ es local. □

Teorema 8.2.9. *Sea $M \neq 0$. Si M es Artiniano o Noetheriano entonces existen submodulos $M_1, ..., M_n$ de M inescindibles tales que $M = \bigoplus_{i=1}^n M_i$. Además si M es de longitud finita cada $\operatorname{End}_R(M_i)$ es local.*

Demostración. Tomemos $\Gamma = \{0 \neq B \leq M \mid B \text{ es sumando directo}\}$, $\Gamma \neq \phi$ ya que $M \in \Gamma$. Si M es Artiniano Γ tiene mínimos. Sea B_0 un mínimo de Γ. Entonces B_0 es inescindible.

Ahora sea $\Delta = \{C \leq M \mid \exists 0 \neq B_0, ..., B_1 \leq M \ B_i \text{ ines. tal que } M = B_0 \oplus ... \oplus B_n \oplus C\}$ que por lo anterior $\Delta \neq \phi$. Sea C_0 un mínimo de Δ y supongamos que $M = B_0 \oplus ... \oplus B_n \oplus C_0$. Si $C_0 \neq 0$, como es Artiniano tendría un sumando directo $0 \neq B_{n+1}$ inescindible lo que implicaría que $M = B_0 \oplus ... \oplus B_{n+1} \oplus C_1$, que contradice la minimalidad de C_0. Por lo tanto $C_0 = 0$ y $M = \bigoplus_{i=1}^n B_i$.

Si M es Noetheriano, sea B_0 un máximo en Γ entonces $M = B_0 \oplus C$ y C es inescindible. Sea $\Delta = \{D \leq M \mid D \text{ es sumando directo de } M \text{ y } D = B_1 \oplus ... \oplus B_n \text{ con } B_i \text{ inescindible}\}$ que es no vacío. Sea $B_1 \oplus ... \oplus B_k$ un máximo. Entonces $M = B_1 \oplus ... \oplus B_k \oplus C$, si $C \neq 0$ como es Noetheriano $C = C_1 \oplus B_{k+1}$ con B_{k+1} inescindible, contradiciendo la maximalidad de $B_1 \oplus ... \oplus B_k$. Por lo tanto $M = \bigoplus_{i=1}^k B_i$ con B_i inescindible. □

8.3. Teorema de Krull-Remak-Schmidt-Azumaya

Lema 8.3.1. *Supongamos que $M = \bigoplus_I M_i$ donde cada $\operatorname{End}_R(M_i)$ es local. Sean $\sigma, \tau \in \operatorname{End}(M)$ tales que $\sigma + \tau = 1$. Entonces para cada $j \in I$ existe $U_j \leq M$ y un isomorfismo $\varphi_j : M_j \to U_j$ inducido por σ o τ tal que $M = U_j \oplus (\bigoplus_{i \neq j} M_i)$.*

Demostración. Sea $j \in I$ y tomemos $\pi_j : M \to M_j$ y $\iota_j : M_j \to M$ la proyección y la inclusión canonicas, respectivamente. Escribamos $1 = \pi_j 1 \iota_j = \pi_j(\sigma+\tau)\iota_j = (\pi_j \sigma \iota_j) + (\pi_j \tau \iota)$. Como $\mathrm{End}_R(M)$ es un anillo local, $\pi_j \sigma \iota_j$ es invertible o $\pi_j \tau \iota_j$ es invertible.

Supongamos que $\pi_j \tau \iota_j$ es invertible. Sea $\varphi_j = \tau \iota_j$ y $U_j = \varphi_j(M_j)$. Entonces $\pi_j \varphi_j$ es invertible lo que implica que φ_j es un monomorfismo y por lo tanto un isomorfismo entre M_j y U_j. Además, por el Corolario 3.2.11.(*3*), $M = \mathrm{Im}\,\varphi_j \oplus \mathrm{Ker}\,\pi_j$. Por lo tanto $M = U_j \oplus (\bigoplus_{i \neq j} M_i)$. $\square$

Lema 8.3.2. *Supongamos que $M = \bigoplus_I M_i$ con $\mathrm{End}_R(M_i)$ local para toda $i \in I$, sean $\sigma, \tau \in \mathrm{End}(M)$ tales que $\sigma + \tau = 1$ y $E = \{i_1, ..., i_t\} \subseteq I$. Entonces existen $C_{i_j} \leq M$ e isomorfismos $\varphi_{i_j} : M_{i_j} \to C_{i_j}$ iducidos por σ o τ tal que $M = (C_{i_1} \oplus ... \oplus C_{i_t}) \oplus (\bigoplus_{i \notin E} M_i)$.*

Demostración. La demostración se sigue por inducción usando el lema anterior. $\square$

Lema 8.3.3. *Supongamos que $M = \bigoplus_I M_i$ con cada $\mathrm{End}_R(M_i)$ local. Si $M = A \oplus B$, $A \neq 0$ inescindible y $\pi : M \to A$ la proyección canónica entonces existe $k \in I$ tal que π induce un isomorfismo de M_k en A y $M = M_k \oplus B$.*

Demostración. Sea $\iota : A \to M$ la inclusión canónica y pongamos $\rho = \iota\pi$ así que $\rho \in \mathrm{End}(M)$ además $1 = \rho + (1 - \rho)$. Dado $0 \neq a \in A$, $a = \sum_{j=1}^{t} m_{i_j}$ con $m_{i_j} \in M_{i_j}$ y $\rho(a) = a$ y $(1-\rho)(a) = 0$. Aplicando el Lema 8.3.2, existen $\{C_{i_j}\}_{j=1}^{t}$ submódulos de M tales que $M = (C_{i_1} \oplus ... \oplus C_{i_t}) \oplus (\bigoplus_{i \notin \{i_1,...,i_t\}} M_i)$ con $C_{i_j} \cong M_{i_j}$ e isomorfismos γ_{i_j} inducidos por ρ o $(1-\rho)$.

Si cada γ_{i_j} estuviera inducido por $1 - \rho$ entonces, tomando a como antes, $0 = (1-\rho)(a) = (1-\rho)(\sum_{j=1}^{t} m_{i_j})$ con $(1-\rho)(m_{i_j}) = \gamma_{i_j}(m_{i_j})$. Como la suma de los C_{i_j} es directa, cada $\gamma_{i_j}(m_{i_j}) = 0$ y así $m_{i_j} = 0$. Por lo tanto $a = 0$. Contradicción.

Esto implica que al menos un γ_{i_j} esta inducido por ρ. Sea k ese indice que existe y pongamos $M = C_k \oplus L$. Tenemos que $C_k = \rho(M_k) \subseteq \rho(M) \subseteq A$ y $A = (M \cap A) = (C_k \oplus L) \cap A$. Aplicando la ley modular' obtenemos $A = C_k \oplus (L \cap A)$ pero A es inescindible y $C_k \neq 0$ por lo que $L \cap A = 0$. Por lo tanto $A = C_k$, y como γ_k esta inducido por $\rho = \iota\pi$ tenemos que $M = \mathrm{Im}\,\iota \oplus \mathrm{Ker}\,\pi \cong M_k \oplus B$. $\square$

Teorema 8.3.4 (Krull-Remak-Schmidt-Azumaya)**.** *Sea $M = \bigoplus_I M_i$ con cada $\mathrm{End}_R(M_i)$ local y $M = \bigoplus_J N_j$ con cada N_j inescindible. Entonces existe una biyección $\beta : I \to J$ tal que $M_i \cong N_{\beta(i)}$ para toda $i \in I$.*

Demostración. Para cada $l \in J$, $M = N_l \oplus (\bigoplus_{j \neq l} N_j)$, por el Lema 8.3.3 $M = M_l \oplus (\bigoplus_{j \neq l} N_j)$ con $M_l \cong N_l$. En particular $\mathrm{End}_R(N_j)$ es local para toda $j \in J$ y como $\mathrm{End}_R(M_i)$ es local, M_i es inescindible para cada $i \in I$. Entonces la condiciones de ambas descomposiciones son simétricas.

Damos a I y J una partición dada por clases de isomorfismo. Sea $\overline{I}$ y $\overline{J}$ los conjunto de clases respectivos. Definimos $\Phi : \overline{I} \to \overline{J}$ como $\Phi(\overline{i}) = \overline{j}$ si $M_i \cong N_j$, la cual esta bien definida por las condiciones simétricas de las descomposiciones. Por el Lema 8.3.3 Φ es suprayectiva.

Para la inyectividad basta demostrar que $|\overline{i}| = |\Phi(\overline{i})|$, para esto usaremos el teorema de Cantor-Schröeder-Bernstein, dando una función inyectiva de $\Phi(\overline{i})$ en $\overline{i}$ que por las condiciones simétricas basta dar sólo esta.

Si $|\bar{i}| \in \mathbb{N}$ supongamos de cardinalidad t y tomemos $k \in \Phi(\bar{i})$, entonces por el Lema 8.3.3 existe M_{i_1} tal que $M = M_{i_1} \oplus (\bigoplus_{j \neq k} N_j)$ con $i_1 \in \bar{i}$ y $N_k \cong M_{i_1}$. Como $|\bar{i}| = t$, esto solo lo podemos repetir a lo más t veces. Por lo tanto $|\Phi(\bar{i})| \leq |\bar{i}|$.

Supongamos ahora que $|\bar{i}|$ es infinito. Sea $\pi_j : M \to N_j$ la proyección canónica para cada $j \in J$ y para cada $k \in I$ sea

$$E(k) = \{j \in J \mid \pi_j \text{ induce isomorfismo } M_k \text{ en } N_j\}$$

Observaciones:

1. Para todo $k \in I$ se tiene que $E(k)$ es finito. Sea $j \in E(k)$ y $0 \neq m \in M_k$ entonces $m = \sum_{l=1}^{t} n_{j_l}$ con $n_{j_l} \in N_{j_l}$, como π_j induce isomorfismo entre M_k y N_j tenemos que $\pi_j(m) \neq 0$ así que $j \in \{j_1, ..., j_t\}$.

2. Tomemos $j \in \Phi(\bar{i})$ i. e. $N_j \cong M_i$. Por el Lema 8.3.3 existe $k \in I$ tal que π_j induce isomorfismo entre N_j y M_k lo que implica que $k \in \bar{i}$. Por lo tanto $j \in \bigcup_{k \in \bar{i}} E(k)$. Por otro lado, sea $k \in \bar{i}$ y $j \in E(k)$, entonces $M_k \cong M_i$ y $M_k \cong N_j$ por lo tanto $N_j \cong M_i$ lo que implica que $j \in \Phi(\bar{i})$. Por lo tanto $\Phi(\bar{i}) = \bigcup_{k \in \bar{i}} E(k)$.

Existe un función inyectiva de $\Phi(\bar{i}) = \bigcup_{k \in \bar{i}} E(k)$ en $\coprod_{k \in \bar{i}} E(k)$ (unión ajena). Como $|\bar{i}|$ es infinito también existe una finción biyectiva entre $\bar{i}$ e $\bar{i} \times \mathbb{N}$. Definimos la siguiente función inyectiva $\alpha : \coprod_{k \in \bar{i}} E(k) \to (\bar{i} \times \mathbb{N})$ como $\alpha(j_t) = (k, t)$ donde $j_t \in E(k)$ y t es según la numeración que se le da a $E(k)$. Por lo tanto tenemos una función inyectiva de $\Phi(\bar{i})$ en $\bar{i}$. □

La condición de que el anillo de endomorfismos $\mathrm{End}_R(M_i)$ sea local es necesaria. Considere el anillo $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ que es un dominio (de Dedekind). Es claro que todo dominio entero es inescindible. Denotemos $\theta = \sqrt{-5}$. Se puede ver que el ideal $I = \langle 3, 1 + \theta \rangle$ no es principal e $I^2 = \langle \theta - 2 \rangle \cong R$. Hay un isomorfismo $I \oplus I \cong R \oplus I^2 \cong R \oplus R$, que no satisface la conclución del Teorema de Krull-Remak-Schmidt-Azumaya. [First Course in Noncommutative rings, pp. 287].

Corolario 8.3.5. *Sea $M = \bigoplus_I M_i$ con $\mathrm{End}_R(M_i)$ local para cada $i \in I$ y $N = \bigoplus_J N_j$ con N_j inescindible para cada $j \in J$. Si $M \cong N$ entonces existe una biyección $\beta : I \to J$ tal que $M_i \cong N_{\beta(i)}$.*

Demostración. Sea $\gamma : N \to M$ un isomorfismo, entonces $M = \bigoplus_J \gamma(N_j)$ con cada $\gamma(N_j)$ inescindible. Aplicando el Teorema 8.3.4 tenemos el resultado. □

Corolario 8.3.6. *La descomposición de un módulo inyectivo sobre un anillo Noetheriano (resp. de un módulo de longitud finita) dada por la Proposición 7.2.6 está univocamente determinada en el sentido del Teorema de Krull-Remak-Schmidt-Azumaya.*

Capítulo 9

Anillos y Módulos Semisimples

9.1. Módulos Semisimples

Lema 9.1.1. *Sea M un módulo tal que todo submódulo es sumando directo. Entonces todo submódulo no cero de M contiene un simple.*

Demostración. Sea $0 \neq U \leq M$ y sin perdida de generalidad supongamos que U es f.g.. Entonces U tiene submódulos máximos. Sea $V \leq U$ un máximo. Por hipótesis existe $L \leq M$ tal que $M = V \oplus L$, aplicando la ley modular obtenemos $U = M \cap U = (V \oplus L) \cap U = V \oplus (L \cap U)$.Así $U/V \cong L \cap U$. Por lo tanto $L \cap U$ es simple. □

Lema 9.1.2. *Supongamos que $M = \sum_I S_i$ con S_i simple para cada $i \in I$. Si $U \leq M$ entonces:*

1. *Existe $J \subseteq I$ tal que $M = U \oplus (\bigoplus_J S_i)$.*
2. *Existe $K \subseteq I$ tal que $U \cong \bigoplus_K S_i$*

Demostración. *1.* Sea $\Gamma = \{L \subseteq I \mid U + (\sum_L S_i) = U \oplus (\bigoplus_L S_i)\}$. Γ es no vacío ya que $\phi \in \Gamma$. Usando el lema de Zorn, sea $L \in \Gamma$ un máximo y $N = U \oplus (\bigoplus_L S_i)$. Sea $i_0 \in I - L$ entonces lo la maximalidad de L se tiene que $N \cap S_{i_0} \neq 0$ pero S_{i_0} es simple así que $S_{i_0} \leq N$. Por lo tanto $M = \sum_I S_i \subseteq N \subseteq M$, es decir, $M = N$.

2. Tenemos que $M = U \oplus (\bigoplus_J S_i)$, aplicando (*1*) a $\bigoplus_J S_i$ se tiene que existe $K \subseteq I$ tal que $M = (\bigoplus_J S_i) \oplus (\bigoplus_K S_i)$. Por lo tanto $U \cong \bigoplus_K S_i$. □

Teorema 9.1.3. *Son equivalentes para un módulo:*

(a) *Todo submódulo $U \leq M$ es suma de submódulos simples.*

(b) *M es suma de submodulos simples.*

(c) *M es suma directa de submodulos simples.*

(d) *Todo submódulo es sumando directo.*

Demostración. (a)⇒(b). Es clara.

(b)⇒(c). Aplicando el Lema 9.1.2 con $U = 0$.

(c)⇒(d). Aplicando el Lema 9.1.2.

(d)⇒(a). Sea $U \leq M$ y U_0 la suma de todos los submodulos simples de U. Por hipótesis $M = U_0 \oplus V$, usando la ley modular $U = U \cap M = U \cap U_0 \oplus V = U_0 \oplus (V \cap U)$. Si $U \cap V \neq 0$ por el Lema 9.1.1 existe $S \leq U \cap V$ simple, pero por la forma que se tomó U_0 esto implica que $U_0 \cap (U \cap V) \neq 0$, contradicción. Por lo tanto $U \cap V = 0$ lo que implica que $U = U_0$. □

Definición 9.1.4. Un módulo M se llama *semisimple* si satisface alguna de las condiciones del Teorema 9.1.3. Decimos que un anillo R es *semisimple* si es semisimple como R-módulo.

Observación 9.1.5. Por el Teorema 9.1.10, no es necesario especificar el lado en la definición anterior.

Corolario 9.1.6. *1. Todo submodulo de un semisimple es semisimple.*

2. Todo cociente de un semisimple es semisimple.

3. Suma de semisimples es semisimple.

4. Dos descomposiciones de un módulo semisimple en suma directa de simples son isomorfas en el sentido de Krull-Remak-Schmidt-Azumaya.

Demostración. *1.* Por el Lema 9.1.2.

2. Sea M semisimple y $\varphi : M \to N$ un morfismo suprayectivo. Como $M = \sum S_i$ con cada S_i simple entonces $\varphi(S_i) = 0$ o $\varphi(S_i) \cong S_i$. Por lo tanto $N = \varphi(M) = \varphi(\sum S_i) = \sum \varphi(S_i)$ que es suma de simples.

3. Es clara.

4. Por la Observación 3.4.8, el anillo de endomorfismos de un simple es un anillo local. □

Teorema 9.1.7. *Son equivalentes para un módulo M semisimple:*

(a) $M = \sum_F S_i$ *con F finito y S_i simple.*

(b) $M = \bigoplus_F S_i$

(c) *M es de longitud finita.*

(d) *M es Artiniano.*

(e) *M es Noetheriano.*

(f) *M es f.g.*

(g) *M es finitamente cogenerado.*

Demostración. Las implicaciones (a)⇒(b), (c)⇒(d) y (c)⇒(e) son claras.

(b)⇒(c). Si $M = S_1 \oplus ... \oplus S_n$, entonces $0 \subseteq S_1 \subseteq S_1 \oplus S_2 \subseteq ... \subseteq M$ es una serie de composición.

(d)⇒(g). Por el Teorema 7.1.4.

(e)⇒(f). Por el Teorema 7.1.5.

(f)⇒(a). Tenemos que $M = \sum_{i=1}^{n} Rx_i$ y $M = \sum_J S_j$ con cada S_j simple. Escribimos cada $x_i = s_{j_1} + ... + s_{j_l}$ con $s_{j_t} \in S_{j_t}$. Entonces $Rx_i = Rs_{j_1} + ... + Rs_{j_l}$

pero $Rs_{j_t} \subseteq S_{j_t}$ así que $Rs_{j_t} = 0$ o $Rs_{j_t} = S_{j_t}$. Por lo tanto M es una suma finita de simples.

(b)⇒(b). Supongmos que M es f.c. y $M = \bigoplus_I S_i$ con cada S_i simple e I infinito. Entonces M tiene un submodulo de la forma $\bigoplus_{\mathbb{N}} S_i$. Tomemos para cada $i \in \mathbb{N}$ $A_i = \bigoplus_{j>i} S_j$. Si $0 \neq x \in \bigoplus_{\mathbb{N}} S_i$ $x = s_{i_1}+...+s_{i_k}$ así que $x \in \bigoplus_{i=1}^{l} S_i$ (reordenando si hace falta) entonces $x \notin A_{l+1}$ lo que implica que $\bigcap_{\mathbb{N}} A_i = 0$. Como M es f.c. existe una subfamilia finita $\{i_1, ..., i_m\}$ tal que $\bigcap_{j=1}^{m} A_{i_j} = 0$, contradicción. Por lo tanto I es finito. □

Definición 9.1.8. Sea M semisimple y $\{\Omega_j\}_J$ las clases de isomorfismo de submodulos simples de M. A $\sum_{S\in\Omega_j} S$ se le llama *componente homogenea* de M.

Observación 9.1.9. Sea $B_j = \sum_{S\in\Omega_j} S$.

1. Si S es simple y $S \leq B_j$ entonces $S \in \Omega_j$.
2. $M = \bigoplus_J B_j$

Demostración. 1. Por el Lema 9.1.2.

2. Como M es suma de simples y cada simple esta en algún Ω_j entonces $M = \sum_J B_j$. Sea $j_0 \in J$ y supongamos $D := B_{j_0} \cap \bigoplus_{j\neq j_0} B_j \neq 0$. Por el Lema 9.1.1 existe un simple $S \leq D$, es decir, $S \leq B_{j_0}$ y $S \leq \bigoplus_{j\neq j_0} B_j$ así que por un lado $S \in \Omega_{j_0}$ y por otro, con el Lema 9.1.2, tenemos que existe $j_1 \neq j_0$ tal que $S \in \Omega_{j_1}$. Lo que implica que $\Omega_{j_0} \cap \Omega_{j_1} \neq \emptyset$, contradicción. □

Teorema 9.1.10. *Son equivalentes para un anillo R:*

(a) ${}_RR$ *es semisimple.*

(b) R_R *es semisimple.*

Demostración. Es suficiente demostrar sólo (a)⇒(b). Tenemos que ${}_RR = \bigoplus_{i=1}^{n} S_i$ con S_i simple. Por Lema 8.1.6 ${}_RR = \bigoplus_{i=1}^{n} Re_i$ con los e_i idempotentes ortogonales. Ahora $1 = e_1+...+e_n$, entonces $r = e_1r+...+e_nr$ para cada $r \in R$. Así que $\sum_{i=1}^{n} e_iR = R$. Si $e_ir_i = \sum_{i\neq j} e_jr_j$ al multiplicar por e_i, como los e_i son idempotentes ortogonales obtenemos $e_ie_ir_i = e_ir_i = 0$ por lo tanto $R = \bigoplus_{i=1}^{n} e_iR$.

Sea e uno de los e_i y sea $0 \neq a \in eR$, entonces $a = er_1$ para algún $r_1 \in R$. Definimos $\varphi : Re \to Ra$ como $\varphi(re) = ra$ el cual está bien definido ya que si $se = 0$ entonces $sa = s(er_1) = (se)r_1 = 0$, además φ es un isomorfismo. Como ${}_RR$ es semisimple ${}_RR = Ra \oplus U$ para algún $U \leq R$. Sea $\psi : Ra \oplus U \to R$ como $\psi(ra+u) = \varphi^{-1}(ra)$ que es morfismo y $\psi(a) = e$. Como $\psi \in \mathrm{End}({}_RR)$ entonces existe $b \in R$ tal que $\psi = (\_ \cdot b)$. Así que $e = \psi(a) = (\_ \cdot b)(a) = ab$ lo que implica que $e \in aR$. Entonces $eR = aR$, por lo tanto eR es simple. □

Corolario 9.1.11.
1. *R es semisimple si y sólo si todo R-módulo izquierdo y derecho es semisimple.*
2. *Si R es semisimple entonces ${}_RR$ y R_R tienen la misma longitud finita.*
3. *Si R es semisimple y $\rho : R \to T$ es un morfismo de anillos suprayectivo entonces T es semisimple.*
4. *Si R es semisimple entonces ${}_RR$ y R_R son cogeneradores.*

5. *R es semisimple si y sólo si todo R-módulo izquierdo y derecho es inyectivo si y sólo si todo R-módulo izquierdo y derecho es proyectivo.*

6. *R es semisimple si y sólo si todo R-módulo izquierdo simple y derecho simple es proyectivo.*

Demostración. *1* $\Rightarrow$. Tomemos un R-módulo izquierdo M y $x \in M$. Como $Rx \cong R/(0:x)$ y R es semisimple entonces Rx también, además $M = \sum_{x \in M} Rx$. Por lo tanto M es semisimple.

1 $\Leftarrow$. Es obvia.

2. Se sigue de la prueba del Teorema 9.1.10.

3. Por restriccíon de escalares (Ejemplo 1.0.8.4) T es un R-módulo. Ahora si I es un T-submódulo de T entonces I es un R-submódulo de ${}_RT$ y reciprocamente si K es un R-submódulo de ${}_RS$ entonces como ρ es sobre K es un T-submódulo de T. Por lo tanto T es semisimple.

4. Sean M un R-módulo izquierdo y $0 \neq m \in M$ entonces existe un morfismo suprayectivo $f : R \to Rm$. Como M es semisimple este morfismo se escinde, así que existe $g : M \to R$ tal que $g(m) \neq 0$. Por lo tanto $\bigcap_{\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M,R)} \mathrm{Ker}\,\varphi = 0$.

5. Si R es semisimple entonces todo módulo es semisimple. Entonces todo monomorfismo y todo epimorfismo se escinde. Recíprocamente si $I \leq R$, entonces la inclusión se escinde, es decir, I es sumando directo de R. Analogamente, si todo módulo es proyectivo la proyección canónica $R \to R/I$ se escinde, es decir, I es sumando directo de R. Por lo tanto R es semisimple.

6 $\Rightarrow$. Se sigue del inciso anterior.

6 $\Leftarrow$. Sea $\mathrm{Zoc}(R) := \sum S_i$ con $S_i \leq R$, S_i simple. Si $\mathrm{Zoc}(R) < R$, como R es f.g. entonces existe $\mathcal{M} \leq R$ máximo tal que $\mathrm{Zoc}(R) \subseteq \mathcal{M}$.Como $R/\mathcal{M}$ es simple y cada simple es proyectivo entonces la proyección canónica $\pi : R \to R/\mathcal{M}$ se escinde, es decir, $R = A \oplus \mathcal{M}$ con $A \cong R/\mathcal{M}$ simple. Contradicción ya que $\mathrm{Zoc}(R)$ es la suma de todos los simples de R y $\mathrm{Zoc}(R) \subseteq \mathcal{M}$. □

Lema 9.1.12. *Sea $A \leq {}_RR$ tal que A es un sumando directo. Entonces el ideal bilateral generado por A contiene a todos los ideales izquierdos de R que son cocientes de A.*

Demostración. Supongamos ${}_RR = A \oplus B$. Sea $\pi : R \to A$ la proyección canónica y sea $\varphi : A \to A'$ un epimorfismo con $A' \leq {}_RR$. Tenemos la siguiente composición:

$$R \xrightarrow{\pi} A \xrightarrow{\varphi} A' \xhookrightarrow{i} R$$

que es un endomorfismo de R así que $i\varphi\pi = (\_ \cdot b)$ para algún $b \in R$. Por lo tanto

$$A' = i\varphi\pi(R) = i\varphi\pi(A) = (\_ \cdot b)(A) = Ab \subseteq AR$$

□

Definición 9.1.13. Sea R un anillo. Decimos que R es un *anillo simple* si no contiene ideales bilaterales distintos de los triviales.

Ejemplo 9.1.14. Sea $n > 0$ y K un anillo con división. Entonces el anillo $M_n(K)$ de matrices cuadradas de $n \times n$ con coeficientes en K es un anillo simple.

Teorema 9.1.15. *Sea R semisimple y supongamos que ${}_RR = B_1 \oplus ... \oplus B_n$ (resp. $R_R = C_1 \oplus ... \oplus C_m$) donde los B_i son las componentes homogéneas (resp. C_i). Entonces*

1. *Cada $B_j = \sum_{i\in\Omega_j} S_i$ es un ideal bilateral y no contiene ideales bilaterales no triviales de R.*
2. *$n = m$ y $B_i = C_i$*
3. $$B_iB_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ B_i & i = j \end{cases}$$
4. *B_i considerado como anillo es un anillo simple con elemento unitario.*
5. *La descomposición de R como suma directa de ideales bilaterales simples es única (salvo el orden).*

Demostración. *1.* Veamos que si $S \subseteq B_i$ con S simple entonces $SR = B_i$.

Sea $r \in R$. Tomemos el epimorfismo $(\_ \cdot r) : S \to Sr$. Como S es simple entonces $Sr = 0$ o $S \cong Sr$. Por lo tanto $SR \subseteq B_i$.

Ahora, sea $S' \cong S$, como S es sumando directo de R, por el Lema 9.1.12 $S' \subseteq SR$ por lo tanto $B_i \subseteq SR$.

Ahora como $B_j = \sum S_i$ entonces $B_jR = \sum(S_iR) = \sum B_j = B_j$. Por lo tanto B_j es bilateral.

2. Por el inciso anterior cada C_i es bilateral, entonces $C_jB_i \subseteq C_j$ y $C_jB_i \subseteq B_i$. Como C_jB_i es un ideal bilateral de R, por el inciso (*1*), $C_jB_i = 0$ o $C_jB_i = C_j = B_i$.

Sea $i_0 \in \{1, .., n\}$ fijo. Si para todo $j \in \{1, ..., m\}$ $C_jB_{i_0} = 0$ entonces

$$B_{i_0} = RB_{i_0} = (\bigoplus C_j)B_{i_0} = \bigoplus(C_jB_{i_0}) = 0$$

Contradicción. Por lo tanto existe $j_0 \in \{1, ..., m\}$ tal que $C_{j_0} = B_{i_0}$.

Si C_{j_1} con $j_1 \neq j_0$ es tal que $C_{j_1} = B_{i_0}$ entonces $C_{j_1} = C_{j_0}$, lo que no puede ser.

3. Como $R = \bigoplus B_i$ se tiene que $B_j = B_jR = \bigoplus B_jB_i$. Ya que esta suma es directa $B_jB_i = 0$ si $i \neq j$.

4. Sea A un ideal bilateral de B_i. Entonces usando el inciso anterior

$$RAR = \bigoplus B_jA \bigoplus B_k = \bigoplus B_jAB_k = B_iAB_i$$

ya que los B_i son bilaterales. Por el inciso (*1*) tenemos que $A = 0$ o $A = B_i$.

5. Se sigue de (*2*). □

Definición 9.1.16. Los ideales bilaterales B_i $i = 1, ..., n$ del Teorema 9.1.15 son llamados los *bloques* del anillo semisimple R.

Observación 9.1.17. Si $R = B_1 \oplus ... \oplus B_n$ es semisimple, entonces el número de bloques de R es igual al número de clases de isomorfismos de R-módulos simples $|R - Simp|$.

Teorema 9.1.18. *Sea ${}_KV$ un espacio vectorial sobre un anillo con división K. Entonces*

1. *Si* $1 \leq dim_K(V) \leq n$ *entonces* $\operatorname{End}_K(V)$ *es un anillo simple y semisimple.*

2. *Si* $dim_K(V) = \infty$, *entonces* $\operatorname{End}_K(V)$ *no es semisimple ni un anillo simple.*

Demostración. *1.* Supongamos que $dim_K(V) = n$ entonces $\operatorname{End}_K(V) \cong M_n(K)$. Por el Ejemplo 2.1.4.*2*, para cada $1 \leq l \leq n$

$$S_l = \{(a_{ij}) \in M_n(K) \mid a_{ij} = 0 \text{ para todo } j \neq l\}$$

es simple. Además $M_n(K) = \bigoplus_{i=1}^n S_l$.

2. Supongamos que $dim_K(V) = \infty$. Decimos que $\varphi \in \operatorname{End}_K(V)$ es de rango finito si $dim_K(\operatorname{Im}\varphi)$ es finita. Notemos que si φ es de rango finito y $\psi \in \operatorname{End}_K(V)$ entonces $\varphi\psi$ y $\psi\varphi$ son de rango finito. Por lo tanto $A := \{\varphi \in \operatorname{End}(V) \mid \varphi \text{ es de rango finito}\}$ es un ideal bilateral de $\operatorname{End}_K(V)$. Este ideal no es trivial ya que si $0 \neq v \in V$ entonces $V = Kv \oplus W$ para algún $W \leq V$. Por lo tanto, si π denota la proyección canónica en Kv se tiene que $0 \neq \pi \in A$. Por otro lado $Id_V \notin A$. Por lo tanto $\operatorname{End}_K(V)$ no es un anillo simple.

Si $\operatorname{End}_K(V)$ fuera semisimple entonces $\operatorname{End}_K(V) = A \oplus B$ para algún $B \neq 0$. Como A es bilateral, $AB \subseteq B$ y $AB \subseteq A$ pero $A \cap B = 0$. Por lo tanto $AB = 0$. Sean $0 \neq \beta \in B$ y $v \in V$ tal que $0 \neq \beta(v)$. Tomemos $K\beta(v) \leq V$. Entonces $V = K\beta(v) \oplus U$ y si definimos $\alpha : V \to V$ como $\alpha(k\beta(v) + u) = k\beta(v)$ se tiene que $\alpha \in A$ pero $\alpha\beta(v) = \beta(v) \neq 0$ i.e. $AB \neq 0$. Contradicción. $\square$

Teorema 9.1.19. *Un anillo simple R que posee un ideal izquierdo simple S es isomorfo al anillo de endomorfismos de un espacio vectorial sobre un anillo con división de dimensión finita.*

Demostración. Sea S el ideal izquierdo simple de R. Como S es simple $K := \operatorname{End}_R(S)$ es un anillo con división y S es un espacio vectorial sobre K.

Afirmamos que $R \cong \operatorname{End}_K(S)$. Sea $\Phi : R \to \operatorname{End}_K(S)$ definido como $\Phi(r)(x) = rx$. Es rutina ver que Φ es un morfismo de anillos. Como $\operatorname{Ker}\Phi$ es un ideal bilateral de R y R es simple se tiene que $\operatorname{Ker}\Phi = 0$. Sea $\xi \in \operatorname{End}_K(S)$ y $\Phi(x)$ con $x \in S$. Si $y \in S$

$$\xi \circ \Phi(x)(y) = \xi(xy) = \xi((\_ \cdot y)(x)) = (\_ \cdot y)\xi(x) = \xi(x)y = \Phi(\xi(x))(y).$$

Por lo tanto $\xi \circ \Phi(x) = \Phi(\xi(x))$ así que $\Phi(S)$ es un ideal izquierdo de $\operatorname{End}_K(S)$. Además como $Id \in \Phi(R)$, $\operatorname{End}_K(S)\Phi(R) = \operatorname{End}_K(S)$. Como R es simple, $SR = R$ así que $\Phi(R) = \Phi(SR) = \Phi(S)\Phi(R)$. Por lo tanto

$$\operatorname{End}_K(S) = \operatorname{End}_K(S)\Phi(R) = \operatorname{End}_K(S)\Phi(S)\Phi(R)$$

$$\leq \Phi(S)\Phi(R) = \Phi(R).$$

Por lo tanto Φ es un isomorfismo. Además como $\operatorname{End}_K(S)$ es simple, por el Teorema 9.1.18 ${}_KS$ es de dimensión finita. $\square$

Corolario 9.1.20. *Si R es semisimple entonces $R = R_1 \times \ldots \times R_n$ con cada R_i anillo simple $R_iR_j = 0$ si $i \neq j$ y $R_i \cong M_{n_i}(D_i)$ con D_i anillo con división.*

Demostración. Sólo hay que aplicar el Teorema 9.1.19 a cada bloque de R. $\square$

9.2. Radical y Zoclo

Teorema 9.2.1. *Sea M un R-módulo. Entonces*

1.
$$\sum_{A<<M} A = \bigcap\{B < M \mid B \text{ máximo}\}$$
$$= \bigcap\{\operatorname{Ker}\varphi \mid \varphi \in \operatorname{Hom}_R(M,N) \text{ con } N \text{ semisimple}\}.$$

2.
$$\bigcap_{A\leq_e M} A = \sum\{B \leq M \mid B \text{ simple}\}$$
$$= \sum\{\operatorname{Im}\varphi \mid \varphi \in \operatorname{Hom}_R(N,M) \text{ con } N \text{ semisimple}\}.$$

Demostración. 1. Si $m \in \bigcap\{B < M \mid B \text{ máximo}\}$ entonces por el Lema 6.1.6, $Rm << M$ lo que implica que $m \in \sum_{A<<M} A$. Por lo tanto
$$\bigcap\{B < M \mid B \text{ máximo}\} \subseteq \sum_{A<<M} A.$$

Sea $B < M$, con B máximo. Entonces M/B es simple y tenemos la proyección canónica $\pi : M \to M/B$ con $B = \operatorname{Ker}\pi$. Entonces, si denotamos π_B a la proyección canónica al cociente para cada submódulo B máximmo tenemos que
$$\bigcap\{\operatorname{Ker}\varphi \mid \varphi \in \operatorname{Hom}_R(M,N) \text{ con } N \text{ semisimple}\} \subseteq \bigcap\{\operatorname{Ker}\pi_B \mid B \text{ máximo}\}$$
$$= \bigcap\{B < M \mid B \text{ máximo}\}.$$

Si $A << M$ y $\varphi : M \to N$ es un morfismo, entonces $\varphi(A) << N$. Si N es semisimple, el único submódulo superfluo de N es 0. Por lo tanto, si N es semisimple, entonces $\varphi(A) = 0$. Esto implica que
$$\sum_{A<<M} A \subseteq \bigcap\{\operatorname{Ker}\varphi \mid \varphi \in \operatorname{Hom}_R(M,N) \text{ con } N \text{ semisimple}\}.$$

Así hemos probado *1.*

2. Si $B \leq M$ con B simple y $A \leq_e M$ entonces $A \cap B = B$, lo que implica que $B \subseteq A$. Por lo tanto
$$\sum\{B \leq M \mid B \text{ simple}\} \subseteq \bigcap_{A\leq_e M} A.$$

Si $\varphi : N \to M$ es un morfismo con N semisimple entonces $\varphi(N)$ es semisimple. Por lo tanto
$$\sum\{\operatorname{Im}\varphi \mid \varphi \in \operatorname{Hom}_R(N,M) \text{ con } N \text{ semisimple}\} \subseteq \sum\{B \leq M \mid B \text{ simple}\}.$$

Sean $C \leq \bigcap\{A \mid A \leq_e M\}$ y C' un p.c. de C en M. Entonces $C \oplus C' \leq_e M$ así que $\bigcap\{A \mid A \leq_e M\} \subseteq C \oplus C'$. Usando el Lema 2.1.16 se tiene que
$$\bigcap_{A\leq_e M} A = \left(\bigcap_{A\leq_e M} A\right) \cap (C \oplus C') = C \oplus \left(\left(\bigcap_{A\leq_e M} A\right) \cap C'\right).$$

Por lo tanto C es sumando directo de $\bigcap\{A \mid A \leq_e M\}$ lo que implica que $\bigcap\{A \mid A \leq_e M\}$ es semisimple. Por lo tanto

$$\bigcap_{A \leq_e M} A \subseteq \sum\{\operatorname{Im}\varphi \mid \varphi \in \operatorname{Hom}_R(N, M) \text{ con } N \text{ semisimple}\}.$$

De estas contenciones obtenemos *2*. □

Definición 9.2.2. Sea M un R-módulo.

1. El submódulo dado en el Teorema 9.2.1.*1* es llamado el *radical* de M y se denota $\operatorname{Rad}(M)$.
2. El submódulo dado en el Teorema 9.2.1.*2* es llamado el *zoclo* de M y se denota $\operatorname{Zoc}(M)$.

Corolario 9.2.3. *Para $m \in M$ se tiene que:*

1. *$Rm << M$ si y sólo si $m \in \operatorname{Rad}(M)$.*

2. *$\operatorname{Zoc}(M)$ es el mayor submódulo semisimple de M.*

Demostración. Para 1 hay que usar la definición y la contrapositiva del Lema 6.1.6. El inciso *2* se sigue de la definición. □

Proposición 9.2.4. *Sea M un R-módulo. Entonces M es finitamente generado si y solo si $\operatorname{Rad}(M) << M$ y $M/\operatorname{Rad}(M)$ es f.g.*

Demostración. Supongamos que M es finitamente generado. Por la Proposición 2.2.5, $M/\operatorname{Rad}(M)$ es f.g. Por el Teorema 9.2.1, $\operatorname{Rad}(M) = \sum\{A \mid A << M\}$. Sea $N \leq M$ tal que $M = N + \operatorname{Rad}(M) = N + \sum\{A \mid A << M\}$. Como M f.g., M tiene submódulos máximos (Teorema 2.1.22), lo que implica que $\operatorname{Rad}(M)$ es un submódulo propio de M. Por lo otro lado, de la Proposición 2.1.19 se tiene que existen $A_1, ..., A_t$ tales que $A_i << M$ para cada $1 \leq i \leq t$ y $M = A_1 + \cdots + A_t + N$. Por lo tanto $N = M$ y $\operatorname{Rad}(M) << M$. □

Teorema 9.2.5. *Sean M y N R-módulos.*

1. *Si $\varphi : M \to N$ es un morfismo, entonces:*

   I. $\varphi(\operatorname{Rad}(M)) \subseteq \operatorname{Rad}(N)$

   II. $\varphi(\operatorname{Zoc}(M)) \subseteq \operatorname{Zoc}(N)$

   III. *Si φ es un epimorfismo superfluo entonces $\varphi(\operatorname{Rad}(M)) = \operatorname{Rad}(N)$ y $\varphi^{-1}(\operatorname{Rad}(N)) = \operatorname{Rad}(M)$.*

   IV. *Si φ es un monomorfimo esencial entonces $\varphi(\operatorname{Zoc}(M)) = \operatorname{Zoc}(N)$ y $\varphi^{-1}(\operatorname{Zoc}(N)) = \operatorname{Zoc}(M)$.*

2. *$\operatorname{Rad}(\frac{M}{\operatorname{Rad}(M)}) = 0$ y para todo $C \leq M$ tal que $\operatorname{Rad}(M/C) = 0$ se tiene que $\operatorname{Rad}(M) \subseteq C$.*

3. *$\operatorname{Zoc}(\operatorname{Zoc}(M)) = \operatorname{Zoc}(M)$ y para todo $C \leq M$ tal que $\operatorname{Zoc}(C) = C$ se tiene que $C \subseteq \operatorname{Zoc}(M)$.*

Demostración. 1.I. Tenemos que $\operatorname{Rad}(M) = \sum\{A \mid A << M\}$. Entonces $\varphi(\operatorname{Rad}(M)) = \varphi(\sum\{A \mid A << M\}) = \sum\{\varphi(A) \mid A << M\}$ y como bajo morfismos, superflos van a dar a superfluos, $\operatorname{Rad}(M) \subseteq \operatorname{Rad}(N)$.

1.II. Es claro ya que la imagen de un semisimple es semisimple.

1.III. Tenemos que $\varphi(\operatorname{Rad}(M)) \subseteq \operatorname{Rad}(N)$. Sea $U << N$. Supongamos que $\varphi^{-1}(U)+A = M$, entonces $\varphi\varphi^{-1}(U)+\varphi(A) = N$. Así que $U+\varphi(A) = N$, lo que implica que $\varphi(A) = N$. Ahora sea $m \in M$. Entonces $\varphi(m) \in N = \varphi(A)$ por lo que existe $a \in A$ tal que $\varphi(a) = \varphi(m)$. Equivalentemente $m - a \in \operatorname{Ker}\varphi$. Como $m = a+(m-a)$, $M = A+\operatorname{Ker}\varphi$. Por hipótesis, $A = M$. Por lo tanto $\varphi^{-1}(U) << M$. Entonces $\varphi^{-1}(U) \subseteq \operatorname{Rad}(M)$, así que $U = \varphi\varphi^{-1}(U) \subseteq \varphi(\operatorname{Rad}(M))$. Por lo tanto $\operatorname{Rad}(N) \subseteq \varphi(\operatorname{Rad}(M))$.

Se tiene que $\operatorname{Ker}\varphi << M$, entonces

$$\operatorname{Rad}(M) = \operatorname{Ker}\varphi + \operatorname{Rad}(M) = \varphi^{-1}\varphi(\operatorname{Rad}(M)) = \varphi^{-1}(\operatorname{Rad}(N)).$$

1.IV. Tenemos que $\varphi(\operatorname{Zoc}(M)) \subseteq \operatorname{Zoc}(N)$. Sea $S \leq N$ simple. Como $\operatorname{Im}\varphi \leq_e N$, $S \subseteq \operatorname{Im}\varphi$. Al ser φ un monomorfismo, $\varphi^{-1}(S)$ es un submódulo simple de M, lo que implica que $\varphi^{-1}(S) \subseteq \operatorname{Zoc}(M)$. Entonces $\varphi\varphi^{-1}(S) = S \subseteq \varphi(\operatorname{Zoc}(M))$.

Ahora

$$\operatorname{Zoc}(M) = \varphi^{-1}\varphi(\operatorname{Zoc}(M)) = \varphi^{-1}(\operatorname{Zoc}(N)).$$

2. Por la Proposición 2.2.3, si $A \leq M/\operatorname{Rad}(M)$ es un submódulo máximo entonces $A = B/\operatorname{Rad}(M)$ con B máximo en M, así:

$$\operatorname{Rad}\left(\frac{M}{\operatorname{Rad}(M)}\right) = \bigcap\{B/\operatorname{Rad}(M) \mid B \leq M \text{ máximo}\}$$

$$= \frac{\bigcap\{B \mid B \text{ máximo}\}}{\operatorname{Rad}(M)} = \frac{\operatorname{Rad}(M)}{\operatorname{Rad}(M)} = 0.$$

Ahora, sea $C \leq M$ tal que $\operatorname{Rad}(M/C) = 0$. Si $\pi : M \to M/C$ es la proyección canónica, entonces $\pi(\operatorname{Rad}(M)) \subseteq \operatorname{Rad}(M/C) = 0$. Por lo tanto $\operatorname{Rad}(M) \subseteq \operatorname{Ker}\pi = C$.

3. Por el Corolario 9.2.3.*2*.

□

Corolario 9.2.6. *1. Si $C \leq M$ entonces*

I. $\operatorname{Rad}(C) \leq \operatorname{Rad}(M)$

II. $\operatorname{Zoc}(C) \leq \operatorname{Zoc}(M)$

2. Si $M = \bigoplus_I M_i$ entonces

I. $\operatorname{Rad}(M) = \bigoplus_I \operatorname{Rad}(M_i)$

II. $\operatorname{Zoc}(M) = \bigoplus_I \operatorname{Zoc}(M_i)$

III. $M/\operatorname{Rad}(M) \cong \bigoplus_I (M_i/\operatorname{Rad}(M_i))$

Demostración. 1 Se sigue del Teorema 9.2.5 tomando la inclusión canónica.

2.I. Para cada $i \in I$ tenemos que $\operatorname{Rad}(M_i) \subseteq \operatorname{Rad}(M)$, así que $\bigoplus_I \operatorname{Rad}(M_i) \subseteq \operatorname{Rad}(M)$. Sea $m \in \operatorname{Rad}(M)$. Entonces m es una suma finita $\sum m_i$ con $m_i \in M_i$. Consideremos $\pi_i : M \to M_i$ las proyecciones canónicas. Como $\pi(\operatorname{Rad}(M)) \subseteq \operatorname{Rad}(M_i)$, cada $m_i \in \operatorname{Rad}(M_i)$. Por lo tanto $m \in \bigoplus_I \operatorname{Rad}(M_i)$.

2.II. Es análoga a la anterior.

2.III. Definimos el siguiente morfismo

$$\varphi : M/\operatorname{Rad}(M) \to \bigoplus_I (M_i/\operatorname{Rad}(M_i))$$

como $\varphi(m + \operatorname{Rad}(M)) = \varphi(\sum m_i + \operatorname{Rad}(M)) = \sum(m_i + \operatorname{Rad}(M_i))$. Claramente φ es sobre. Supongamos que $\varphi(\sum m_i + \operatorname{Rad}(M)) = 0$, es decir, $\sum(m_i + \operatorname{Rad}(M_i)) = 0$. Entonces $m_i + \operatorname{Rad}(M_i) = 0$ para cada $i \in I$. Por lo tanto $m_i \in \operatorname{Rad}(M_i)$ para cada $i \in I$ y entonces $\sum m_i + \operatorname{Rad}(M) = 0$ ya que $\operatorname{Rad}(M_i) \subseteq \operatorname{Rad}(M)$. □

Proposición 9.2.7. *1. Si M es semisimple entonces* $\operatorname{Rad}(M) = 0$.

2. $\operatorname{Rad}(R)M \subseteq \operatorname{Rad}(M)$.

3. $\operatorname{Rad}(R)$ *es un ideal bilateral.*

4. Si M es f.g. entonces $\operatorname{Rad}(M) << M$.

5. Si M es f.g. y $A \subseteq \operatorname{Rad}(R)$ entonces $AM << M$. (Nakayama)

6. Si $0 \neq M$ es f.g. entonces $\operatorname{Rad}(M) < M$.

7. Si P es proyectivo entonces $\operatorname{Rad}(P) = \operatorname{Rad}(R)P$.

8. Si $C \leq M$ entonces $\frac{C+\operatorname{Rad}(M)}{C} \subseteq \operatorname{Rad}(M/C)$.

Demostración. 1. Es clara por el Corolario 9.2.6.*2.I*.

2. Sea $m \in M$. Definimos $f_m : R \to M$ como $f_m(r) = rm$. Por el Teorema 9.2.5 $f_m(\operatorname{Rad}(R)) \subseteq \operatorname{Rad}(M)$. Por lo tanto

$$\operatorname{Rad}(R)M = \sum_{m \in M} \operatorname{Rad}(R)m \subseteq \operatorname{Rad}(M).$$

3. Es inmediata del inciso *2*.

4. Supongamos que $M = \operatorname{Rad}(M) + A$ con $A < M$. Como M es f.g. existe un submodulo máximo C de M, tal que $A \subseteq C$. Entonces $M = \operatorname{Rad}(M) + A \subseteq C < M$. Contradiccion.

5. Sea $A \subseteq \operatorname{Rad}(R)$. Entonces

$$AM \subseteq \operatorname{Rad}(R)M \subseteq \operatorname{Rad}(M) << M.$$

6. Como M es f.g. tenemos que $\operatorname{Rad}(M) << M$.

7. Tomemos $(y_i, \varphi_i)_I$ la familia dada por el Teorema de la base dual (Teorema 6.3.7). Dado $u \in \operatorname{Rad}(P)$, $\varphi_i(u) \in \operatorname{Rad}(R)$. Por lo tanto $u = \sum_I \varphi_i(u)y_i \in \operatorname{Rad}(R)P$.

8. Tomemos $\pi : M \to M/C$ la proyección canónica. Entonces $\pi(\operatorname{Rad}(M)) = \frac{C+\operatorname{Rad}(M)}{C} \subseteq \operatorname{Rad}(M/C)$. □

Corolario 9.2.8. *Sea $e \in R$ un idempotente. Entonces* $\operatorname{Rad}(Re) = \operatorname{Rad}(R)e$.

Demostración. Si $e \in R$ es un idempotente entonces $R = Re \oplus R(1-e)$. Entonces Re es proyectivo y finitamente generado. Por la Proposition 9.2.7.*7*, $\operatorname{Rad}(Re) = \operatorname{Rad}(R)Re = \operatorname{Rad}(R)e$. □

Observación 9.2.9. Note que en el inciso (*4*) de la Proposición 9.2.7 la hipótesis de que M sea f.g. es necesaria. Considere el $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Q}$. Entonces

$$\mathrm{Rad}(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Q}) = \mathrm{Rad}(\mathbb{Z}) \oplus \mathrm{Rad}(\mathbb{Q}) = 0 \oplus \mathbb{Q}$$

que no es superfluo.

Definición 9.2.10. Sea $A \leq M$. Decimos que $A' \leq M$ es un *suplemento de A en M,* si es mínimo con la propiedad de que $A + A' = M$.

Lema 9.2.11. *Supongamos que $M = A + B$. Entonces B es suplemento de A en M si y solo si $A \cap B << B$.*

Demostración. $\Rightarrow$. Sea $U \leq B$ tal que $B = U + (A \cap B)$. Tenemos que

$$M = A + B = A + U + (A \cap B) = A + U.$$

Entonces $B = U$ por la minimidad de B.

$\Leftarrow$. Sea $U \leq B$ tal que $M = A + U$. Entonces, usando la ley modular

$$B = M \cap B = B \cap (U + A) = U + (B \cap A)$$

Como $A \cap B << B$, $U = B$. Por lo tanto B es mínimo con la propiedad de que $M = A + B$. □

Observación 9.2.12. Si $M = A \oplus B$ entonces B es psudocomplemento y suplemento de A en M.

Teorema 9.2.13. *1. M es s.s. si y solo si todo $N \leq M$ tiene suplemento en M y* $\mathrm{Rad}(M) = 0$.

2. M es s.s. y f.g. si y solo si M es Artiniano y $\mathrm{Rad}(M) = 0$.

Demostración. *1* $\Rightarrow$. Por la Proposición 9.2.7, $\mathrm{Rad}(M) = 0$. En un módulo s.s. todo submódulo es sumando directo.

$\Leftarrow$. Sea $C \leq M$. Por hipótesis existe $B \leq M$ suplemento de C en M. Por el Lema 9.2.11, $B \cap C << B$ así que $B \cap C << M$. Tenemos que $\mathrm{Rad}(M) = 0$, entonces $B \cap C = 0$. Por lo tanto $M = C \oplus B$. Es decir, todo submodulo es sumando directo.

2 $\Rightarrow$. Si M es s.s. y f.g. entonces es Artiniano, y como M es s.s. $\mathrm{Rad}(M) = 0$.

$\Leftarrow$. Si M es Artiniano todo submódulo tiene suplemento, así que por (*1*), M es s.s. Además si M es s.s. y Artiniano entonces es f.g. □

Corolario 9.2.14. *Si M es Artiniano entonces $\frac{M}{\mathrm{Rad}(M)}$ es s.s.*

Demostración. Sabemos que cocientes de módulos Artinianos son Artinianos, además $\mathrm{Rad}(\frac{M}{\mathrm{Rad}(M)}) = 0$. Así, por el Teorema 9.2.13 $\frac{M}{\mathrm{Rad}(M)}$ es s.s. □

Lema 9.2.15. *Son equivalentes para $A \leq R$:*

1. $A << R$
2. $A \subseteq \mathrm{Rad}(R)$
3. *Para todo $a \in A$ se tiene que $1 - a$ tiene inverso por la izquierda.*

4. *Para todo $a \in A$ se tiene que $1-a$ tiene inverso.*

Demostración. *1* $\Rightarrow$ *2*. Es clara.

2 $\Rightarrow$ *1*. Por la Proposición 9.2.7.*4*, $\operatorname{Rad}(R) << R$ y como $A \subseteq \operatorname{Rad}(R)$ entonces $A << R$.

1 $\Rightarrow$ *3*. Sea $a \in A$. Entonces $r = ra + r(1-a)$, lo que implica que $R = A + R(1-a)$, pero $A << R$ así que $R = R(1-a)$. Por lo tanto $1-a$ tiene inverso izquierdo.

3 $\Rightarrow$ *4*. Sean $a \in A$ y $r \in R$ tal que $r(1-a) = 1$. Entonces $r = 1-(-ra)$. Como $-ra \in A$ existe $s \in R$ tal que $s(1-(-ra)) = 1$, es decir, $sr = 1$. Por lo tanto r tiene inverso derecho e izquierdo, lo que implica que $s = 1-a$. Por lo tanto r es el inverso de $1-a$.

4 $\Rightarrow$ *1*. Supongamos que $R = A + B$. Entonces $1 = a + b$ con $a \in A$ y $b \in B$. Por hipótesis existe $r \in R$ tal que $rb = r(1-a) = 1$ lo que implica que $1 \in B$. Por lo tanto $B = R$ y $A << R$. □

Observación 9.2.16. Tambien se tiene la version para ideales derechos del lema anterior.

Teorema 9.2.17. *Sea R un anillo. Entonces* $\operatorname{Rad}({}_RR) = \operatorname{Rad}(R_R)$.

Demostración. Por la Proposicion 9.2.7.*4*, $\operatorname{Rad}({}_RR) << {}_RR$, así que por el Lema 9.2.14, para todo $a \in \operatorname{Rad}({}_RR)$ $1-a$ tiene inverso. Como $\operatorname{Rad}({}_RR)$ es un ideal bilateral, por la Observacion 9.2.16, $\operatorname{Rad}({}_RR) << R_R$. Por lo tanto $\operatorname{Rad}({}_RR) \subseteq \operatorname{Rad}(R_R)$. Por simetría se tiene la igualdad. □

Observación 9.2.18. En la literatura, el ideal $\operatorname{Rad}(R)$ es conocido como el *radical de Jacobson* del anillo R.

Teorema 9.2.19. *Sea R un anillo tal que $\frac{R}{\operatorname{Rad}(R)}$ es s.s. Entonces:*

1. *Todo simple izq. (resp. der.) es isomorfo a un submodulo izq. (resp. der.) de $\frac{R}{\operatorname{Rad}(R)}$.*

2. *El numero de bloques de $\frac{R}{\operatorname{Rad}(R)}$ es finito e igual al numero de clases de isomorfismo de modulos simples izq. (resp. der.).*

Demostración. *1*. Sea ${}_RS$ simple, entonces existe $\mathcal{M} \leq R$ ideal máximo tal que $S \cong R/\mathcal{M}$. Tenemos que $\operatorname{Rad}(R) \subseteq \mathcal{M}$ entonces

$$S \cong \frac{R}{\mathcal{M}} \cong \frac{R/\operatorname{Rad}(R)}{\mathcal{M}/\operatorname{Rad}(R)}$$

Como $R/\operatorname{Rad}(R)$ es s.s. entonces $\mathcal{M}/\operatorname{Rad}(R)$ es sumando directo, es decir, $R/\operatorname{Rad}(R) = (\mathcal{M}/\operatorname{Rad}(R)) \oplus (A/\operatorname{Rad}(R))$. Por lo tanto

$$A/\operatorname{Rad}(R) \cong \frac{R/\operatorname{Rad}(R)}{\mathcal{M}/\operatorname{Rad}(R)} \cong S$$

2. Por el Lemma 2.1.11 los R-submodulos de ${}_R(\frac{R}{\operatorname{Rad}(R)})$ coinciden con los ideales izquierdos de $R/\operatorname{Rad}(R)$. Entonces $R/\operatorname{Rad}(R)$ es semisimple como $\frac{R}{\operatorname{Rad}(R)}$-módulo. Lo que implica que los bloques de $R/\operatorname{Rad}(R)$ son finitos. Además por (*1*), $R/\operatorname{Rad}(R)$ contiene una copia de cada R-módulo simple. □

Teorema 9.2.20. *Sea R un anillo tal que $R/\operatorname{Rad}(R)$ es s.s. Entonces para todo R-módulo M:*

1. $\operatorname{Rad}(M) = \operatorname{Rad}(R)M$

2. $\operatorname{Zoc}(M) = \{m \in M \mid \operatorname{Rad}(R)m = 0\}$

Demostración. *1.* Tenemos que $\operatorname{Rad}(R)(\frac{M}{\operatorname{Rad}(R)M}) = 0$, así que $\frac{M}{\operatorname{Rad}(R)M}$ es un $R/\operatorname{Rad}(R)$-módulo. Como $R/\operatorname{Rad}(R)$ es semisimple entonces $\frac{M}{\operatorname{Rad}(R)M}$ es s.s. como $\frac{R}{\operatorname{Rad}(R)}$-módulo. Por el Lema 2.1.11 $\frac{M}{\operatorname{Rad}(R)M}$ es s.s. como R-módulo. Por lo tanto $\operatorname{Rad}(\frac{M}{\operatorname{Rad}(R)M}) = 0$. Así $\operatorname{Rad}(M) \subseteq \operatorname{Rad}(R)M$.

2. Todo s.s. tiene radical cero y $\operatorname{Rad}(R)M \subseteq \operatorname{Rad}(M)$. Entonces, si $A := \{m \in M \mid \operatorname{Rad}(R)m = 0\}$, tenemos que $\operatorname{Zoc}(M) \subseteq A$. Por otra parte, $\operatorname{Rad}(R)A = 0$, así que A es un $\frac{R}{\operatorname{Rad}(R)}$-módulo y tiene los mismos submodulos que ${}_RA$. Pero A como $\frac{R}{\operatorname{Rad}(R)}$-módulo es s.s. lo que implica que ${}_RA$ es s.s.. Por lo tanto $A \subseteq \operatorname{Zoc}(M)$. □

Definición 9.2.21. Un ideal izq. (resp. der. o bilateral) A de R se llama *nil-ideal* si todo elemento de A es nilpotente. Decimos que A es *nilpotente* si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $A^m = 0$.

Proposición 9.2.22.
1. *Todo ideal izq. (resp. der. o bilateral) nilpotente es un nil-ideal.*

2. *La suma de dos ideales nilpotentes es nilpotente.*

3. *Todo nil-ideal esta contenido en* $\operatorname{Rad}(R)$.

4. *Si ${}_RR$ es Noetheriano, todo ideal bilateral que sea nil-ideal es nilpotente.*

Demostración. Los incisos (*1*), (*2*) y (*3*) se dejan como ejercicio al lector.

4. Sea $B \leq R$ un ideal bilateral que es nil-ideal. Consideremos la siguiente familia

$$\{{}_RC \leq R \mid C \text{ es nilpotente y } C \subseteq B\}$$

La familia anterior es no vacía y como ${}_RR$ es Noetheriano tiene máximos. Sea A un máximo y supongamos que $A < B$. Por (*2*) A es el mayor nilpotente incluido en B. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $A^n = 0$, entonces $(Ar)^n = (Ar)(Ar)\dots(Ar) = A^n r = 0$ lo que implica que $Ar \leq A$ para todo $r \in R$, así que A es bilateral. Consideremos el conjunto $\{(b : A) \mid b \in B - A\}$, el cual tiene máximos. Sea $(b_0 : A)$ un máximo. Supongamos que existe $x \in R$ tal que $b_0x \notin A$. Entonces $(b_0 : A) \subseteq (b_0x : A)$, por la maximidad de $(b_0 : A)$, tenemos que $(b_0x : A) = (b_0 : A)$. Como $b_0x \in B$ entonces existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $(b_0x)^l = 0 \in A$. Por lo tanto existe $k \in \mathbb{N}$ mínimo tal que $(b_0x)^{k-1} \notin A$ y $(b_0x)^k \in A$. Así que $((b_0x)^{k-1} : A) = (b_0 : A)$ lo que implica que $b_0xb_0 \in A$. Entonces, tenemos que para todo $x \in R$ tal que $b_0x \notin A$, $b_0xb_0 \in A$.

Sea $rb_0sb_0 \in Rb_0Rb_0$. Si $b_0s \notin A$ entonces $b_0sb_0 \in A$ y por lo tanto $rb_0sb_0 \in A$. Si $b_0s \in A$ entonces $rb_0sb_0 \in A$. Entonces $(Rb_0)^2 \subseteq A$, por lo que $((Rb_0)^2)^n = 0$. Por la maximidad de A, $Rb_0 \leq A$. Contradiccion. Por lo tanto $A = B$. □

Observación 9.2.23. Notemos que existen nil-ideales que no son nilpotentes. Para esto consideremos el anillo

$$R = \frac{\mathbb{Z}[x_1, x_2, ...]}{\ell(\{x_1^2, x_2^3, x_3^4, ...\})}$$

Sea $A = \ell(\{\overline{x_1}, \overline{x_2}, ...\})$. Entonces A es un nil-ideal ya que sus generadores son nilpotentes pero es fácil ver que A no es nilpotente.

Teorema 9.2.24. *Si ${}_RR$ es Artiniano entonces* $\operatorname{Rad}(R)$ *es nilpotente.*

Demostración. Tenemos la siguiente cadena descendente

$$R \supseteq \operatorname{Rad}(R) \supseteq \operatorname{Rad}(R)^2 \supseteq ...$$

Como R es Artiniano existe una $n \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{Rad}(R)^n = \operatorname{Rad}(R)^{n+l}$ para toda $l \geq 0$. Supongamos que $\operatorname{Rad}(R)^n \neq 0$. Consideremos la familia $\{{}_RA \leq R \mid \operatorname{Rad}(R)^n A \neq 0\}$. Esta familia no es vacía pues $\operatorname{Rad}(R)$ está en ella. Como ${}_RR$ es Artiniano podemos tomar un mínimo en la familia, digamos A. Como $\operatorname{Rad}(R)^n A \neq 0$ existe $a \in A$ tal que $\operatorname{Rad}(R)^n a \neq 0$ y por lo tanto $\operatorname{Rad}(R)^n Ra \neq 0$ pero $Ra \leq A$ lo que implica que $Ra = A$. Así

$$\operatorname{Rad}(R)^n A = \operatorname{Rad}(R)^n Ra = \operatorname{Rad}(R)^{n+1} Ra = \operatorname{Rad}(R)^n Rad(R) Ra$$

$$= \operatorname{Rad}(R)^n Rad(R) a.$$

Por la minimidad de A, $\operatorname{Rad}(R)a = A = Ra$. Ahora, por la Proposición 9.2.7 tenemos que

$$\operatorname{Rad}(R)a = \operatorname{Rad}(R)Ra \subseteq \operatorname{Rad}(Ra) << Ra.$$

Por lo tanto $\operatorname{Rad}(R)a < Ra$. Contradicción. □

Corolario 9.2.25. 1. *Si ${}_RR$ es Artiniano entonces* $\operatorname{Rad}(R)$ *es el mayor ideal izq. (resp. der. o bilateral) nilpotente.*

2. *Si R es conmutativo y Artiniano entonces* $\operatorname{Rad}(R) = \{r \mid r \textit{ es nilpotente}\}$.

3. *Si ${}_RR$ es Artiniano entonces* $\operatorname{Rad}(M) = \operatorname{Rad}(R)M << M$ *para todo R-módulo M (También vale por la derecha).*

Demostración. *1.* Por el Teorema 9.2.24, $\operatorname{Rad}(R)$ es nilpotente. Si $A \leq R$ es un ideal nilpotente entonces por la Proposicion 9.2.22.*3* $A \subseteq \operatorname{Rad}(R)$.

2. Como $\operatorname{Rad}(R)$ es nilpotente entonces todos sus elementos son nilpotentes. Ahora, si $a \in R$ es nilpotente con $a^n = 0$ entonces $(Ra)^n = Ra^n = 0$ así que $Ra \subseteq \operatorname{Rad}(R)$. Por lo tanto $a \in \operatorname{Rad}(R)$.

3. Por el Corolario 9.2.14 $R/\operatorname{Rad}(R)$ es s.s., entonces para todo R-modulo M, $\operatorname{Rad}(M) = \operatorname{Rad}(R)M$ por el Teorema 9.2.20. Supongamos que $M = \operatorname{Rad}(R)M + U$, entonces $\operatorname{Rad}(R)(\operatorname{Rad}(R)M + U) + U = M$ lo que implica que $\operatorname{Rad}(R)^2M + U = M$. Inductivamente $\operatorname{Rad}(R)^nM + U = M$ para toda n. Como $\operatorname{Rad}(R)$ es nilpotente entonces $U = M$. □

Observación 9.2.26. Notemos que en inciso (*2*) del corolario anterior, si R no es conmutativo entonces no es cierto. Cosidere el anillo $R = M_2(K)$ de las matrices cuadradas de 2×2 con coeficientes en un campo K. Como se vió en el Teorema 9.1.18, R es un anillo simple y semisimple así que $\operatorname{Rad}(R) = 0$. Por otro lado, el elemento $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es nilpotente.

Definición 9.2.27. Un anillo R se llama *semiprimario* si $\operatorname{Rad}(R)$ es nilpotente y $R/\operatorname{Rad}(R)$ es semisimple.

Teorema 9.2.28. *Sea R un anillo semiprimario. Un R-módulo M es Noetheriano si y sólo si M es Artiniano.*

Demostración. Sea R semiprimario, entonces existe $n \geq 1$ tal que $\operatorname{Rad}(R)^n = 0$. Supongamos que M es un R-módulo Artiniano. Por el Teorema 9.2.20 $\operatorname{Rad}(M) = \operatorname{Rad}(R)M$. Consideremos los R-módulos Artinianos

$$M/\operatorname{Rad}(M), \operatorname{Rad}(M)/\operatorname{Rad}(M)^2, ..., \operatorname{Rad}(M)^{n-1}/\operatorname{Rad}(M)^n = \operatorname{Rad}(M)^{n-1}.$$

Cada uno de estos módulos lo podemos ver como $\frac{R}{\operatorname{Rad}(R)}$-módulo y por lo tanto son semisimples, más aún por el Lemma 2.1.11 y el Teorema 9.1.7 son de longitud finita, en particular Noetherianos. En vista del Lemma 2.1.11 estos cocientes son Noetherianos como R-módulos.

Tenemos la siguiente sucesión exacta corta

$$0 \to \operatorname{Rad}(M)^{n-1} \to \operatorname{Rad}(M)^{n-2} \to \frac{\operatorname{Rad}(M)^{n-2}}{\operatorname{Rad}(M)^{n-1}} \to 0.$$

Por el Teorema 7.1.5, $\operatorname{Rad}(M)^{n-2}$ es Noetheriano. Repitiendo este proceso tenemos que M es Noetheriano. Por simetría se tiene la otra implicación. □

Corolario 9.2.29. *Un anillo R es Artiniano si y sólo si R es semiprimario y Noetheriano.*

Demostración. $\Rightarrow$. Por el Corolario 9.2.14 $R/\operatorname{Rad}(R)$ es semisimple y por el Teorema 9.2.24 $\operatorname{Rad}(R)$ es nilpotente. Por lo tanto R es simprimario. Por el Teorema 9.2.28 R es Noetheriano.

$\Leftarrow$ Se sigue del Teorema 9.2.28. □

Observación 9.2.30. Notemos que el Corolario anterior nos dice que todo anillo Artiniano es Noetheriano. A este resultado se le conoce como *Teorema de Hopkins-Levitzki*.

Lema 9.2.31. *Sea $N \leq M$. Entonces* $\operatorname{Zoc}(N) = \operatorname{Zoc}(M) \cap N$.

Demostración. La demostración se deja al lector. □

Proposición 9.2.32. *Son equivalentes para un R-módulo $M \neq 0$:*

(a) *M es finitamente cogenerado.*

(b) $\operatorname{Zoc}(M) \leq_e M$ *y* $\operatorname{Zoc}(M)$ *es f.cog.*

(c) *$E(M) = Q_1 \oplus ... \oplus Q_n$ donde $Q_i = E(S_i)$ para algun simple S_i.*

Demostración. (a)$\Rightarrow$(b). Tenemos que $\operatorname{Zoc}(M) = \bigcap_{A \leq_e M} A$. Sea $L \leq M$ tal que $L \cap \operatorname{Zoc}(M) = 0$. Como M es f.c. existe un subconjunto finito de submódulos esenciales $A_1, ..., A_n$ de M tales que $\bigcap_{i=1}^n A_i \cap L = 0$. Como la intersección finita de esenciales es esencial se tienen que $L = 0$. Por lo tanto $\operatorname{Zoc}(M) \leq_e M$. Claramente, submódulos de f.c. son f.c.

(b)⇒(a). Sea $\{A_i\}_I$ una familia de submódulos de M tales que $\bigcap_I A_i = 0$. Entonces $\bigcap_I \mathrm{Zoc}(A_i) = 0$ y como $\mathrm{Zoc}(A_i) \subseteq \mathrm{Zoc}(M)$ existe un subconjunto finito $J \subseteq I$ tal que $\bigcap_J \mathrm{Zoc}(A_i) = 0$. Usando el Lema 9.2.31 tenemos que

$$0 = \bigcap_J \mathrm{Zoc}(A_i) = \bigcap_J (\mathrm{Zoc}(M) \cap A_i) = \mathrm{Zoc}(M) \cap \left(\bigcap_J A_i \right).$$

Se sigue que $\bigcap_J A_i = 0$ ya que $\mathrm{Zoc}(M) \leq_e M$.

(b)⇒(c). Sea $E(M)$ la cápsula inyectiva de M. Por la hipótesis, $\mathrm{Zoc}(M) \leq_e E(M)$. Como $\mathrm{Zoc}(M)$ es f.c., por el Teorema 9.1.7 $\mathrm{Zoc}(M) = S_1 \oplus ... \oplus S_n$ con S_i simple. Como la cápsula inyectiva conmuta con sumas directas finitas se tiene que

$$E(M) = E(\mathrm{Zoc}(M)) = E(S_1 \oplus ... \oplus S_n) = E(S_1) \oplus ... \oplus E(S_n).$$

(c)⇒(b). Supongamos que $E(M) = E(S_1) \oplus ... \oplus E(S_n)$ con S_i simple. Entonces

$$\mathrm{Zoc}(E(M)) = \mathrm{Zoc}\left(\bigoplus_1^n E(S_i) \right) = \bigoplus_1^n \mathrm{Zoc}(E(S_i)) = \bigoplus_1^n S_i$$

ya que $S_i \leq_e E(S_i)$. Ahora, por el Lema 9.2.31, $\mathrm{Zoc}(M) = M \cap \mathrm{Zoc}(E(M)) = \bigoplus_1^n S_i \cap M = \bigoplus_1^n S_i$ pues como $M \leq_e E(M)$, cada S_i está contenido en M. Por lo tanto $\mathrm{Zoc}(M)$ es f.c. por el Teorema 9.1.7. Como $S_i \leq_e E(S_i)$, $\bigoplus_1^n S_i \leq_e E(M)$ y por lo tanto $\mathrm{Zoc}(M) \leq_e M$. □

Corolario 9.2.33. *Sea M un R-módulo. Entonces M es Artiniano si y sólo si para todo cociente M/U se tiene que:*

1. $\mathrm{Zoc}(M/U) \leq_e (M/U)$
2. $\mathrm{Zoc}(M/U)$ *es f.c.*

Demostración. Es clara tomando en cuenta el Teorema 7.1.4. □

Teorema 9.2.34. 1. *${}_RR$ es Noetheriano si y sólo si todo módulo inyectivo ${}_RQ$ es suma directa de inyectivos inescindibles.*

2. *${}_RR$ es Artiniano si y sólo si todo módulo inyectivo ${}_RQ$ es suma directa de cápsulas inyectivas de módulos simples.*

Demostración. *1* ⇒. Por la Proposición 7.2.6.

1 ⇐. Sea $\{S_i\}_\mathbb{N}$ una familia numerable de módulos simples. Afirmamos que $M := \bigoplus_\mathbb{N} E(S_i)$ es inyectivo. Tenemos que $\mathrm{Zoc}(M) = \bigoplus_\mathbb{N} S_i = \mathrm{Zoc}(E(M))$. Por hipótesis $E(M) = \bigoplus_J D_j$ con D_j inyectivo inescindible. Sea $J_1 = \{j \in J \mid \mathrm{Zoc}(D_j) \neq 0\}$, entonces $\mathrm{Zoc}(E(M)) = \bigoplus_{J_1} \mathrm{Zoc}(D_j)$. Por el Corolario 7.2.4, $\mathrm{Zoc}(D_j) = T_j$ con T_j simple. Así que

$$\bigoplus_\mathbb{N} S_i = \mathrm{Zoc}(M) = \mathrm{Zoc}(E(M)) = \bigoplus_{J_1} T_j$$

Por el Teorema 8.3.4 cada $S_i \cong T_j$ para algún $j \in J_1$ lo que implica que $E(S_i) \cong D_j$. Por lo tanto $M = \bigoplus_\mathbb{N} E(S_i) \cong \bigoplus_{J_1} D_j$ pero $M \leq_e E(M)$ y

$\bigoplus_{J_1} D_j$ es un sumando directo de $E(M)$ por lo tanto $E(M) = \bigoplus_{J_1} D_j \cong M$. Por lo tanto M es inyectivo y así $_RR$ es Noetheriano por el Teorema 7.1.14.

2 $\Rightarrow$. Por el Corolario 9.2.29 R es Noetheriano, así que por la Proposición 7.2.6 se tiene el resultado.

2 $\Leftarrow$. Sea A un ideal izquierdo de R y consideremos $E(R/A)$. Por hipótesis $E(R/A) = \bigoplus_I E(S_i)$ con S_i simple. Como R/A es cíclico existe un subconjunto finito $J \subseteq I$ tal que $R/A \subseteq \bigoplus_J E(S_i)$, i.e., $E(R/A) = \bigoplus_J E(S_i)$. Por la Proposición 9.2.32 y el Corolario 9.2.33 $_RR$ es Artiniano. □

Teorema 9.2.35. *Sea $_RQ$ un R-módulo inyectivo y $S = \mathrm{End}_R(Q)$. Son equivalentes para $f \in S$:*

(a) $f \in \mathrm{Rad}(S)$

(b) $\mathrm{Ker}\, f \leq_e Q$

Demostración. (a)$\Rightarrow$(b). Sea $f \in \mathrm{Rad}(S)$. Sea $U \leq Q$ tal que $U \cap \mathrm{Ker}\, f = 0$. Entonces $f|_U$ es un monomorfismo. Como Q es inyectivo existe $g \in S$ tal que $g \circ f|_U = i$ donde $i : U \to Q$ es la inclusión canónica. Entonces para todo $u \in U$, $u = i(u) = gf(u)$ lo que implica que $U \subseteq \mathrm{Ker}(Id_Q - gf)$. Como $f \in \mathrm{Rad}(S)$, gf también. Así que $Id_Q - gf$ tiene inverso. Por lo tanto $U \subseteq \mathrm{Ker}(Id_Q - gf) = 0$.

(b)$\Rightarrow$(a). Consideremos Sf y supongamos que $S = Sf + G$ para algún ideal izq. G de S. Entonces existen $g \in G$ y $h \in S$ tales que $Id_Q = hf + g$. Si $x \in \mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g$ entonces $x = hf(x) + g(x) = 0$. Como $\mathrm{Ker}\, f \leq_e Q$, $\mathrm{Ker}\, g = 0$, es decir, g es un monomorfismo. Como Q es inyectivo existe $k \in S$ tal que $kg = Id_Q$ lo que implica que $Id_Q \in G$ y por lo tanto $G = S$. Entonces $Sf << S$ y así $f \in \mathrm{Rad}(S)$. □

Corolario 9.2.36. *Sea $_RQ$ inyectivo y $S := \mathrm{End}_R(Q)$. Entonces para cada $f \in S$ existe $g \in S$ tal que $fgf - f \in \mathrm{Rad}(S)$.*

Demostración. Sea $f \in S$. Sea $U \leq Q$ un p.c. de $\mathrm{Ker}\, f$, entonces $\mathrm{Ker}\, f \oplus U \leq_e Q$. Además $f|_U$ es un monomorfismo, así que existe $g \in S$ tal que $gf|_U = i$ donde $i : U \to Q$ es la inclusión canónica. Si $k + u \in \mathrm{Ker}\, f \oplus U$ entonces

$$(fgf - f)(k + u) = fgf(k + u) - f(k + u) = fgf(u) - f(u)$$

$$= fgf(u) - f(gf(u)) = 0$$

Por lo tanto $\mathrm{Ker}\, f \oplus U \subseteq \mathrm{Ker}(fgf - f)$, así que $\mathrm{Ker}(fgf - f) \leq_e Q$. Por el Teorema 9.2.35, $fgf - f \in \mathrm{Rad}(S)$. □

Definición 9.2.37. Un anillo R se llama *regular de von Neumann* si para cada $r \in R$ existe $x \in R$ tal que $rxr = r$.

Teorema 9.2.38. *Sea P proyectivo y $S := \mathrm{End}_R(P)$. Son equivalentes para $f \in S$:*

(a) $f \in \mathrm{Rad}(S)$

(b) $\mathrm{Im}\, f << P$

Demostración. (a)⇒(b). Sea $U \leq P$ tal que $\operatorname{Im} f + U = P$. Consideremos $\pi : P \to P/U$ la proyección canónica. Entonces para cada $p \in P$ existen $f(x) \in \operatorname{Im} f$ y $u \in U$ tales que $p + P = (f(x) + u) + P = f(x) + P$. Por lo tanto πf es suprayectiva. Como P es proyectivo, existe $g \in S$ tal que $\pi f g = \pi$. Entonces $\pi(Id_P - fg) = 0$ lo que implica que $\operatorname{Im}(Id_P - fg) \subseteq \operatorname{Ker} \pi = U$. Como $f \in \operatorname{Rad}(S)$, $Id_P - fg$ tiene inverso. Por lo tanto $\operatorname{Im}(Id_P - fg) = P = U$.

(b)⇒(a). Supongamos que $S = fS + G$ para algún ideal derecho G de S. Entonces existen $h \in S$ y $g \in G$ tales que $Id_P = fh + g$. Así, para todo $x \in P$, $x = (fh + g)(x) = f(h(x)) + g(x)$ lo que implica que $P = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$. Pero $\operatorname{Im} f << P$ por lo que $\operatorname{Im} g = P$, es decir, g es sobre. Como P es proyectivo existe $k \in S$ tal que $gk = Id_P$. Por lo tanto $G = S$. Entonces $fS << S_S$ y $f \in \operatorname{Rad}(S)$. ☐

Teorema 9.2.39. *Si $0 \neq P$ es proyectivo entonces $\operatorname{Rad}(P) \neq P$.*

Demostración. Sea $S := \operatorname{End}_R(P)$. Para cada $p \in P$ y $\varphi : P \to R$ definimos $\varphi_p : P \to P$ como $\varphi_p(x) = \varphi(x)p$. Sea $p \in \operatorname{Rad}(P)$. Entonces $Rp << P$ así que $\operatorname{Im} \varphi_p = \varphi(P)p \subseteq (Rp) << P$. Por lo tanto $\operatorname{Im} \varphi_p << P$. Por el Teorema 9.2.38 $\varphi_p \in \operatorname{Rad}(S)$.

Sea (φ_i, p_i) la familia dada por el Teorema 6.3.7. Entonces para todo $x \in P$ $x = \sum \varphi_i(x)p_i$. Por lo tanto $(Id_p - \varphi_{i_{p_i}})(x) = 0$. Supongamos que $\operatorname{Rad}(P) = P$. Si $0 \neq x \in P$, $x = \sum \varphi(x)p_i$. Como cada $p_i \in \operatorname{Rad}(P)$ entonces $\varphi_{i_{p_i}} \in \operatorname{Rad}(S)$ para toda i. Lo que implica que $\sum \varphi_{i_{p_i}} \in \operatorname{Rad}(S)$ y por lo tanto $Id_P - \sum \varphi_{i_{p_i}}$ tiene inverso. Contradicción. ☐

Corolario 9.2.40. *Si P es proyectivo y $P = P_1 \oplus P_2$ con $P_2 \subseteq \operatorname{Rad}(P)$ entonces $P_2 = 0$.*

Demostración. Consideremos $\pi : P \to P_2$ la proyección canónica. Entonces si $P_2 \subseteq \operatorname{Rad}(P)$
$$P_2 = \pi(P_2) \subseteq \pi(\operatorname{Rad}(P)) \subseteq \operatorname{Rad}(P_2) \subseteq P_2$$
Así que $\operatorname{Rad}(P_2) = P_2$. Como P_2 es proyectivo, $P_2 = 0$ por el Teorema 9.2.39. ☐

Observación 9.2.41. Por la proposición 9.2.7.*2* sabemos que $\operatorname{Rad}(R)M \subseteq \operatorname{Rad}(M)$ y si M es Artiniano por el Corolario 9.2.14 y el Teorema 9.2.20 tenemos la igualdad. La pregunta es ¿Para qué anillos se tiene que $\operatorname{Rad}(R)M = \operatorname{Rad} M$?

Teorema 9.2.42. *Sea R un anillo y denotemos $\overline{R} := R/\operatorname{Rad}(R)$. Son equivalentes:*

(a) $\operatorname{Rad}(R)M = \operatorname{Rad}(M)$ *para todo R-módulo M.*

(b) *Sea M un R-módulo. Si* $\operatorname{Rad}(R)M = 0$ *entonces* $\operatorname{Rad}(M) = 0$.

(c) $\operatorname{Rad}(\overline{M}) = 0$ *para todo $\overline{R}$-módulo $\overline{M}$.*

(d) *Si $\varphi : M \to N$ es un R-morfismo entonces* $\varphi(\operatorname{Rad}(M)) = \operatorname{Rad}(\varphi(M))$.

(e) *Sea M un R-módulo y $U \leq M$ entonces* $\frac{\operatorname{Rad}(M)+U}{U} = \operatorname{Rad}(M/U)$.

(f) *Sea M un R-módulo y $U \leq M$. Si* $\operatorname{Rad}(M) = 0$ *entonces* $\operatorname{Rad}(M/U) = 0$.

Demostración. (a)⇒(b). Es clara.

(b)⇒(c). Sea $\overline{M} \in \overline{R}$-Mod. Consideremos el morfismo canónico de anillos $\rho : R \to \overline{R}$. Entonces $\overline{M}$ es un R-módulo, así $\operatorname{Rad}(R)\overline{M} = 0$ lo que implica que $\operatorname{Rad}({}_R\overline{M}) = 0$ pero $0 = \operatorname{Rad}({}_R\overline{M}) = \operatorname{Rad}({}_{\overline{R}}\overline{M})$.

(c)⇒(a). Sea M un R-módulo y consideremos el R-módulo $\frac{M}{\operatorname{Rad}(R)M}$. Como $\operatorname{Rad}(R)(\frac{M}{\operatorname{Rad}(R)M}) = 0$ entonces $\frac{M}{\operatorname{Rad}(R)M}$ es un $\overline{R}$-módulo y tiene los mismos submódulos que como R-módulo. Por hipótesis, $\operatorname{Rad}({}_{\overline{R}}\frac{M}{\operatorname{Rad}(R)M}) = 0$ así que $\operatorname{Rad}({}_R(\frac{M}{\operatorname{Rad}(R)M})) = 0$. Por el Teorema 9.2.5.*2*, $\operatorname{Rad}(M) \subseteq \operatorname{Rad}(R)M$.

(a)⇒(d). Sea $\varphi : M \to N$ un R-morfismo. Entonces

$$\varphi(\operatorname{Rad}(M)) = \varphi(\operatorname{Rad}(R)M) = \operatorname{Rad}(R)\varphi(M) = \operatorname{Rad}(\varphi(M)).$$

(d)⇒(e). Sólo hay que considerar la proyección canónica $\pi : M \to M/U$.

(e)⇒(f). Es claro.

(f)⇒(a). Sea M un R-módulo. Sabemos que M es cociente de un libre, digamos F, así que existe $U \leq F$ tal que $M \cong F/U$. Por la Proposición 9.2.7.*7*, $\operatorname{Rad}(F) = \operatorname{Rad}(R)F$. Como $\operatorname{Rad}(F/\operatorname{Rad}(F)) = \operatorname{Rad}(R/\operatorname{Rad}(R)F) = 0$, por hipótesis:

$$\operatorname{Rad}\left(\frac{\left(\frac{F}{\operatorname{Rad}(R)F}\right)}{\left(\frac{\operatorname{Rad}(R)F+U}{\operatorname{Rad}(R)F}\right)}\right) = 0$$

pero

$$\frac{\left(\frac{F}{\operatorname{Rad}(R)F}\right)}{\left(\frac{\operatorname{Rad}(R)F+U}{\operatorname{Rad}(R)F}\right)} \cong \frac{F}{\operatorname{Rad}(R)F + U} \cong \frac{\left(\frac{F}{U}\right)}{\left(\frac{\operatorname{Rad}(R)F+U}{U}\right)}.$$

Por lo tanto

$$\operatorname{Rad}\left(\frac{\left(\frac{F}{U}\right)}{\left(\frac{\operatorname{Rad}(R)F+U}{U}\right)}\right) = 0$$

Por el Teorema 9.2.5,

$$\operatorname{Rad}(F/U) \subseteq \frac{\operatorname{Rad}(R)F + U}{U} \subseteq \operatorname{Rad}(R)(F/U).$$

Por lo tanto $\operatorname{Rad}(R)M = \operatorname{Rad}(M)$. □

Definición 9.2.43. Un anillo que satisface las condiciones del Teorema 9.2.42 se llama *bueno izquierdo*.

Capítulo 10

Producto Tensorial

10.1. Producto Tensorial

Sea S un anillo y consideremos A_S un S-módulo derecho y ${}_SU$ un S-módulo izquierdo. Tomemos $A \times U$ y luego el $\mathbb{Z}$-módulo libre $F = \mathbb{Z}^{(A\times U)}$ con base $A \times U$.

Definimos los siguientes subconjuntos de F:

$$D_1 = \{(a_1 + a_2, u) - (a_1, u) - (a_2, u) \mid a_1, a_2 \in A \ u \in U\}$$

$$D_2 = \{(a, u_1 + u_2) - (a, u_1) - (a, u_2) \mid a \in A \ u_1, u_2 \in U\}$$

$$T = \{(as, u) - (a, su) \mid a \in A \ u \in U \ s \in S\}$$

Tomamos el submódulo generado por estos subconjuntos

$$K = \langle D_1 \cup D_2 \cup T\rangle \leq F$$

Definición 10.1.1. Sean S un anillo, A_S un S-módulo derecho y ${}_SU$ un S-módulo izquierdo. Consideremos F y K como arriba. El *producto tensorial* de A con U (sobre S) es el grupo abeliano $A \otimes_S U := F/K$.

Observación 10.1.2. Dado un básico $(a, u) \in F$, a su clase de equivalencia en $A \otimes_S U$ la denotamos $a \otimes u$. Claramente el conjunto $\{a \otimes u \mid a \in A \ u \in U\}$ genera a $A \otimes_S U$.

Proposición 10.1.3. *Sean $a, a_1, a_2 \in A$, $u, u_1, u_2 \in U$ y $s \in S$. Entonces:*

1. $(a_1 + a_2) \otimes u = (a_1 \otimes u) + (a_2 \otimes u)$
2. $a \otimes (u_1 + u_2) = (a \otimes u_1) + (a \otimes u_2)$
3. $as \otimes u = a \otimes su$
4. $0 \otimes u = 0 = a \otimes 0$
5. $-(a \otimes u) = (-a) \otimes u = a \otimes (-u)$
6. *Para todo* $z \in \mathbb{Z}$, $z(a \otimes u) = (za) \otimes u = a \otimes zu$

Demostración. La prueba de estas propiedades se deja como ejercicio. □

Observación 10.1.4. Un elemento en F es una suma finita $\sum z_i(a_i, u_i)$ con $z_i \in \mathbb{Z}$, por lo que los elementos de $A \otimes_S U$ son sumas finitas de la forma $\sum z_i a_i \otimes u_i$.

Ejemplo 10.1.5. Sea $0 \neq n \in \mathbb{Z}$. Consideremos los $\mathbb{Z}$-módulos $\mathbb{Z}_n$ y $\mathbb{Q}$, y tomemos el producto tensorial $\mathbb{Z}_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ sobre $\mathbb{Z}$. Entonces

$$a \otimes q = a \otimes \left(\frac{n}{n} q\right) = a \otimes \left(n \left(\frac{1}{n}\right) q\right) = an \otimes \left(\frac{1}{n} q\right) = 0 \otimes \left(\frac{1}{n} q\right) = 0.$$

Por lo tanto $\mathbb{Z}_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$.

Definición 10.1.6. Sean A_S, ${}_SU$ y ${}_{\mathbb{Z}}M$ módulos. Una función $\varphi : A \times U \to M$ es *biaditiva* si

$$\varphi(a_1 + a_2, u) = \varphi(a_1, u) + \varphi(a_2, u)$$
$$\varphi(a, u_1 + u_2) = \varphi(a, u_1) + \varphi(a, u_2).$$

Decimos que φ es *S-tensorial* si además

$$\varphi(as, u) = \varphi(a, su).$$

Observación 10.1.7. Con la notación de la Definición 10.1.1, la siguiente función es S-tensorial

$$A \times U \overset{i}{\hookrightarrow} F \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} A \otimes_S U := F/K$$

donde i es la inclusión de la base y π es la proyección canónica. Denotemos $\tau := \pi \circ i$. Además, para todo morfismo $\lambda : {}_{\mathbb{Z}}(A \otimes_S U) \to {}_{\mathbb{Z}}M$ el mapeo $\lambda\tau$ es S-tensorial y se tiene que $\lambda(\sum(a_i \otimes u_i)) = \sum \lambda(a_i \otimes u_i) = \sum \lambda\tau(a_i, u_i)$. Denotemos por $Tens(A \times U, M)$ a la colección de funciones S-tensoriales.

Proposición 10.1.8. *Consideremos la notación de la definición 10.1.1. Entonces, $Tens(A \times U, M)$ es un $\mathbb{Z}$-módulo. Además, hay un ismorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos entre $Tens(A \times U, M)$ y $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(A \otimes_S U, M)$.*

Demostración. Dados $\varphi, \psi \in Tens(A \times U, M)$, definimos $\varphi + \psi(a, u) = \varphi(a, u) + \psi(a, u)$. Claramente esta operación hace a $Tens(A \times U, M)$ un grupo abeliano. Definimos $\Phi : \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(A \otimes_S U, M) \to Tens(A \times U, M)$ como $\Phi(\lambda) = \lambda\tau$.

Sean $\lambda_1, \lambda_2 \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(A \otimes_S U, M)$. Entonces

$$\Phi(\lambda_1 + \lambda_2)(a, u) = (\lambda_1 + \lambda_2)\tau(a, u) = (\lambda_1 + \lambda_2)(a \otimes u) = \lambda_1(a \otimes u) + \lambda_2(a \otimes u)$$
$$= \lambda_1\tau(a, u) + \lambda_2\tau(a, u) = \Phi(\lambda_1)(a, u) + \Phi(\lambda_2)(a, u).$$

Supongamos que $\Phi(\lambda) = 0$. Entonces

$$0 = \Phi(\lambda)(a, u) = \lambda\tau(a, u)$$

para todo $(a, u) \in A \times U$, así que $\lambda(\sum(a_i \otimes u_i)) = \sum(\lambda\tau(a_i, u_i)) = 0$. Por lo tanto $\lambda = 0$, es decir, Φ es inyectiva. Sea $\varphi \in Tens(A \times U, M)$. Como $A \times U$ es base de F entonces existe un único $\mathbb{Z}$-morfismo $\overline{\varphi} : F \to M$. Ahora, como φ es S-tensorial se tiene que $K \subseteq \operatorname{Ker}\varphi$, lo que implica que existe $\lambda : A \otimes_S U \to M$ tal que $\lambda\pi = \overline{\varphi}$. Por lo tanto $\lambda\tau = \varphi$ y así Φ es suprayectiva.

$$\begin{tikzcd}
A \times U \arrow[r, hook] \arrow[d, "\varphi"'] & F \arrow[r, two heads, "\pi"] \arrow[dl, dashed, "\exists\overline{\varphi}"'] & A \otimes_S U \arrow[dll, dashed, "\exists\lambda"] \\
M & &
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto Φ es un isomorfismo. $\square$

Definición 10.1.9. Sea S un anillo y A_S, ${}_SU$ S-módulos. Una pareja $({}_{\mathbb{Z}}T, \tau)$ es un *producto tensorial* de A y U si $\tau : A \times U \to T$ es S-tensorial y cumple la siguiente propiedad universal:

Dado una función S-tensorial $\tau' : A \times U \to M$, existe un único $\mathbb{Z}$-morfismo $\lambda : T \to M$ tal que $\lambda\tau = \tau'$.

$$\begin{tikzcd} A \times U \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\tau'"'] & {}_{\mathbb{Z}}T \arrow[dl, dashed, "\exists!\lambda"] \\ {}_{\mathbb{Z}}M & \end{tikzcd}$$

Proposición 10.1.10. *Sea S un anillo y A_S, ${}_SU$.*

1. *Si (T, τ) es un producto tensorial de A y U entonces T es único salvo isomorfismo.*

2. *$A \otimes_S U$ es un producto tensorial de A y U.*

Demostración. *1.* Es clara de la propiedad universal del producto tensorial.

2. Por la Proposición 10.1.8. □

Proposición 10.1.11. *Dados A_S, B_S, ${}_SU$ y ${}_SV$ S-módulos, $\alpha \in \operatorname{Hom}_S(A, B)$ y $\mu \in \operatorname{Hom}_S(U, V)$ existe un único $\mathbb{Z}$-morfismo $\alpha \otimes \mu : A \otimes_S U \to B \otimes_S V$ tal que $(\alpha \otimes \mu)(a \otimes u) = \alpha(a) \otimes \mu(u)$*

Demostración. Sean A_S, B_S, ${}_SU$ y ${}_SV$ S-módulos y $\alpha \in \operatorname{Hom}_S(A, B)$ y $\mu \in \operatorname{Hom}_S(U, V)$. Definimos la función $\varphi : A \times U \to B \otimes_S V$ como $\varphi(a, u) = \alpha(a) \otimes \mu(u)$. Entonces φ es S-tensorial. Por lo tanto existe un único morfismo de $A \otimes_S U \to B \otimes_S V$ al que denotamos $\alpha \otimes \mu$. □

Proposición 10.1.12. *Sean A_S, B_S, C_S, ${}_SU$, ${}_SV$ y ${}_SW$ S-módulos y $\alpha \in \operatorname{Hom}_S(A, B)$, $\mu \in \operatorname{Hom}_S(U, V)$, $\beta \in \operatorname{Hom}_S(B, C)$ y $\nu \in \operatorname{Hom}_S(V, W)$. Entonces*

1. *$Id_A \otimes Id_U = Id_{A \otimes_S U}$.*

2. *$(\beta \otimes \nu)(\alpha \otimes \mu) = \beta\alpha \otimes \nu\mu$.*

3. *Si α y μ son isomorfismos entonces $\alpha \otimes \mu$ es isomorfismo.*

Demostración. Se deja como ejercicio al lector. □

Proposición 10.1.13. *Sean A_S y ${}_SU$ S-módulos. Supongamos que además ${}_RA$ es un R-S-bimódulo. Entonces $A \otimes_S U$ es un R-módulo izquierdo.*

Demostración. Sean $r \in R$ y $\sum a_i \otimes u_i \in A \otimes_S U$. Definimos

$$r\left(\sum a_i \otimes u_i\right) = \sum r a_i \otimes u_i.$$

Se puede ver fácilmente que esta operación da estructura de R-módulo izquierdo a $A \otimes_S U$. □

Observación 10.1.14. De forma análoga a la proposición anterior si ${}_SU_T$ es un S-T-bimódulo entonces $A \otimes_S U$ tienen estructura de T-módulo derecho.

Proposición 10.1.15. *Sean R y S anillos. Consideremso ${}_RA_S$, ${}_SU$ y ${}_RM$. Si $\varphi : A\times U \to M$ es una función S-tensorial tal que $\varphi(ra, u) = r\varphi(a, u)$ para todo $r \in R$ entonces existe un único R-morfismo $\lambda : A \otimes_S U \to M$ tal que $\lambda\tau = \varphi$.*

Demostración. Por la Proposición 10.1.8 existe un único $\mathbb{Z}$-morfismo $\lambda : A \otimes_S U \to M$ tal que $\lambda\tau = \varphi$. Ahora, sea $r \in R$ y $\sum a_i \otimes u_i \in A \otimes_S U$. Entonces

$$\lambda\left(r\sum a_i \otimes u_i\right) = \lambda\left(\sum ra_i \otimes u_i\right) = \sum \varphi(ra_i, u_i) = \sum (r\varphi(a_i, u_i))$$

$$= r\sum \varphi(a_i, u_i) = r\lambda\left(\sum a_i \otimes u_i\right).$$

□

Teorema 10.1.16. *Para todo ${}_SU$ se tiene que ${}_S(S \otimes_S U) \cong {}_SU$.*

Demostración. Definimos $\varphi : S \times U \to U$ como $\varphi(s, u) = su$ la cual es S-tensorial. Además $\varphi(ss', u) = (ss')u = s(s'u)$. Por la Proposición 10.1.15 existe un único S-morfismo $\lambda : S \otimes_S U \to U$ definido como

$$\lambda\left(\sum s_i \otimes u_i\right) = \sum s_iu_i.$$

Si $u \in U$, entonces $\lambda(1 \otimes u) = u$. Por lo tanto λ es sobre. Si $\lambda\left(\sum s_i \otimes u_i\right) = 0$, entonces $\sum s_iu_i = 0$. Así que

$$\sum s_i \otimes u_i = \sum 1 \otimes s_iu_i = 1 \otimes \sum s_iu_i = 1 \otimes 0 = 0.$$

Por lo tanto λ es inyectiva. □

Observación 10.1.17. De forma análoga a la proposición anterior, si tenemos A_S un S-módulo entonces $A \otimes_S S \cong A_S$.

Proposición 10.1.18. *El producto tensorial es asociativo, es decir,*

$$(A \otimes_R M) \otimes_S U \cong A \otimes_R (M \otimes_S U)$$

para módulos A_R, ${}_RM_S$ y ${}_SU$.

Demostración. Sea $u_0 \in U$. Definimos la función

$$\varphi_{u_0} : A \times M \to A \otimes_R (M \otimes_S U)$$

como

$$\varphi_{u_0}(a, m) = a \otimes (m \otimes u_0)$$

Se puede ver facilmente que está función es R-tensorial. Por lo tanto existe un único morfismo $\lambda_{u_0} : A \otimes_R M \to A \otimes_R (M \otimes_S U)$ el cual se calcula como $\lambda_{u_0}\left(\sum a_i \otimes m_i\right) = \sum a_i \otimes (m_i \otimes u_0)$. Ahora definimos la función

$$\psi : (A \otimes_R M) \times U \to A \otimes_R (M \otimes_S U)$$

como

$$\psi\left(\sum(a_i \otimes m_i), u\right) = \lambda_u\left(\sum a_i \otimes m_i\right).$$

La función ψ es S-tensorial, así que existe un único morfismo $\zeta : (A \otimes_R M) \otimes_S U \to A \otimes_R (M \otimes_S U)$ definido como

$$\zeta\left(\sum (a_i \otimes m_i) \otimes u\right) = \sum a_i \otimes (m_i \otimes u_i).$$

De forma análoga podemos contruir el inverso de ζ de $A \otimes_R (M \otimes_S U) \to (A \otimes_R M) \otimes_S U$.

□

Proposición 10.1.19. *Sea $\{A_i\}_I$ una familia de S-módulos derechos y sea $\{U_j\}_J$ una familia de S-módulos izquierdos. Entonces*

$$\left(\bigoplus_I A_i\right) \otimes_S \left(\bigoplus_J U_i\right) \cong \bigoplus_I \bigoplus_J (A_i \otimes_S U_j).$$

Demostración. Sean $\iota_i : A_i \to \bigoplus_I A_i$ y $\eta_j : U_j \to \bigoplus_J U_j$ las inclusiones canónicas. Pongamos $A = \bigoplus_I A_i$ y $U = \bigoplus_J U_j$. Definimos la siguiente función S-tensorial

$$\varphi : A \times U \to \bigoplus_I (A_i \otimes U)$$

como

$$\varphi((a_i)_I, u) = (a_i \otimes u)_I.$$

Entonces existe un único morfismo $\lambda : A \otimes U \to \bigoplus_I (A_i \otimes U)$ definido como

$$\lambda((a_i)_I \otimes u) = (a_i \otimes u)_I.$$

Ahora para cada $i \in I$, usando la función S-tensorial definida como

$$(a_i, (u_j)_J) \mapsto \iota_i(a_i) \otimes (u_j)_J$$

tenemos un único morfismo $\lambda_i : A_i \otimes_S U \to A \otimes_S U$. Por la propiedad universal de la suma directa, existe un único morfismo

$$\zeta : \bigoplus_I (A_i \otimes_S U) \to A \otimes_S U$$

dado por

$$\zeta((a_i \otimes u)_I) = \sum_I (\iota_i(a_i) \otimes u).$$

Sea $\sum((a_{i_k})_I)_k \otimes u \in A \otimes_S U$. Entonces

$$\zeta\lambda\left(\sum((a_{i_k})_I)_k \otimes u\right) = \zeta\left(\sum \left((a_{i_k} \otimes u)_k\right)\right)$$

$$= \sum \sum_I \iota_{i_k}(a_{i_k}) \otimes u = \sum((a_{i_k})_I)_k \otimes u.$$

Por lo tanto $\zeta\lambda = Id_{A \otimes_S U}$. Por otro lado, si $(a_i \otimes u)_I \in \bigoplus_I (A_i \otimes_S U)$ entonces

$$\lambda\zeta((a_i \otimes u)_I) = \lambda\left(\sum_I (\iota_i(a_i) \otimes u)\right) = \sum_I \lambda(\iota_i(a_i) \otimes u)$$

$$= \sum_I \mu_i(a_i \otimes u) = (a_i \otimes u)_I$$

donde $\mu_i : A_i \otimes_S U \to \bigoplus_I (A_i \otimes_S U)$ es la inclusión canónica. Por lo tanto λ es un isomorfimo. De la misma forma se puede ver que para cada $i \in I$

$$A_i \otimes_S U \cong \bigoplus_J (A_i \otimes_S U_j).$$

Por lo tanto

$$\bigoplus_I \bigoplus_J (A_i \otimes_S U_j) \cong A \otimes_S U.$$

□

Proposición 10.1.20. *Si A_S es libre con base $\{x_\alpha\}_\Lambda$ entonces todo elemento de $A \otimes_S U$ se representa como una suma finita $\sum x_\alpha \otimes u_\alpha$ donde cada u_α está totalmente determinado.*

Demostración. Si A_S es libre con base $\{x_\alpha\}_\Lambda$ entonces $A = \bigoplus_\Lambda x_\alpha S$ con $x_\alpha S \cong S$. Por el Teorema 10.1.16 y la Proposición 10.1.19 se tiene que

$$A \otimes_S U \cong \left(\bigoplus_\Lambda x_\alpha S \right) \otimes_S U \cong \bigoplus_\Lambda (x_\alpha S \otimes U)$$
$$\cong \bigoplus_\Lambda (S \otimes_S U) \cong \bigoplus_\Lambda U.$$

Si $a \in A$ entonces $a = \sum x_\alpha s_\alpha$ (una suma finita), así

$$\sum a_i \otimes u_i = \sum \left(\sum x_{\alpha_i} s_{\alpha_i} \right) \otimes u_i = \sum \sum (x_{\alpha_i} s_{\alpha_i}) \otimes u_i$$
$$= \sum \sum x_{\alpha_i} \otimes s_{\alpha_i} u_i = \sum x_\alpha \otimes u_\alpha$$

Sea $a = \sum x_\alpha s_\alpha$ la representación de a en la base. Definimos la siguiente función S tensorial $A \times U \to U$ como: fijemos $\beta \in \Lambda$

$$(a, u) \mapsto \begin{cases} s_\beta u & \text{Si } \beta \text{ aparece en la reperesenctación de } a. \\ 0 & \text{En otro caso.} \end{cases}$$

Entonces existe un único morfismo $A \otimes_S U \to U$ definido como

$$\sum x_\alpha \otimes u_\alpha \mapsto \begin{cases} u_\beta & \text{Si } x_\beta \text{ aparece en la suma } \sum x_\alpha \otimes u_\alpha \\ 0 & \text{En otro caso.} \end{cases}$$

Como la imagen de este morfismo está unicamente determinada, se sigue la unicidad de los u_α. □

Corolario 10.1.21. *Sea S un anillo conmutativo. Sean A_S un módulo libre con base $x_1, ..., x_m$ y $_SU$ un módulo libre con base $z_1, ..., z_n$. Entonces $A \otimes_S U$ es un S-módulo libre con base $\{x_i \otimes z_j\}$.*

Demostración. Por la Proposición 10.1.20 cada elemnto de $A \otimes_S U$ es de la forma $\sum x_i \otimes u_i$ donde los u_i están totalmente determinados. Esto implica que si $u_i = \sum s_{ij} z_{ij}$ entonces los s_{ij} está unicamente determinados. Por lo tanto los coeficientes de la representación

$$\sum x_i \otimes u_i = \sum x_i \otimes \left(\sum s_{ij} z_{ij} \right) = \sum \sum s_{ij} (x_i \otimes z_j)$$

son únicos. □

10.2. El producto tensorial como funtor adjunto

Definición 10.2.1. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías. Dados dos funtores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ decimos que F es *adjunto izquierdo* de G (o que G es *adjunto derecho* de F) si hay un isomorfismo:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), B) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, G(B)).$$

Sea M un R-módulo. En la Sección 3.4 se vio que $\mathrm{Hom}_R(M, \_)$ es un funtor

$$\mathrm{Hom}_R(M, \_) : R - Mod \to Ab.$$

Si además M es R-S-bimódulo entonces

$$\mathrm{Hom}_R(M, \_) : R - Mod \to S - Mod.$$

Sea ${}_RA_S$ un R-S-bimódulo. Por la Proposicion 10.1.11, Proposición 10.1.12 y Proposición 10.1.13, tenemos un funtor:

$$A \otimes_S \_ : S - Mod \to R - Mod.$$

Teorema 10.2.2. *Sea ${}_RA_S$ un R-S-bimódulo. Entonces $A \otimes_S \_$ es adjunto izquierdo del funtor* $\mathrm{Hom}_R(A, \_)$.

Demostración. Sean ${}_SU$ y ${}_RN$ módulos. Denotemos por R-$Tens(A \times U, N)$ a todas la funciones S-tensoriales φ tales que $\varphi(ra, u) = r\varphi(a, u)$. Por la Proposición 10.1.8 y la Proposición 10.1.15 tenemos un isomorfimo de grupos abelianos

$$R - Tens(A \times U, N) \cong \mathrm{Hom}_R(A \otimes_S U, N).$$

Ahora, sea $f \in \mathrm{Hom}_S(U, \mathrm{Hom}_R(A, N))$. Definimos $\varphi_f : A \times U \to N$ como $\varphi_f(a, u) = f(u)(a)$. Esta función es S-tensorial y además $\varphi_f(ra, u) = f(u)(ra) = rf(u)(a) = r\varphi_f(a, u)$. Por lo tanto $\varphi_f \in R - Tens(A \times U, N)$.

Por otro lado, si $\varphi \in R - Tens(A \times U, N)$ definimos $f_\varphi : U \to \mathrm{Hom}_R(A, N)$ como $f_\varphi(u)(a) = \varphi(a, u)$. Notemos que $f_\varphi(u)(ra) = \varphi(ra, u) = r\varphi(a, u) = rf_\varphi(u)(a)$. Además, $f_{\varphi_f}(u)(a) = \varphi_f(a, u) = f(u)(a)$ y $\varphi_{f_\varphi}(a, u) = f_\varphi(u)(a) = \varphi(a, u)$. Así tenemos un isomorfismo de grupos abelianos

$$\mathrm{Hom}_S(U, \mathrm{Hom}_R(A, N)) \cong R - Tens(A \times U, N).$$

Por lo tanto

$$\mathrm{Hom}_R(A \otimes_S U, N) \cong \mathrm{Hom}_S(U, \mathrm{Hom}_R(A, N)).$$

□

Proposición 10.2.3. *El funtor $A \otimes_S \_$ es exacto derecho.*

Demostración. Sea $0 \to U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \to 0$ una sucesión exacta corta en S-Mod. Sean ${}_RN$ un R-módulo y $H = \mathrm{Hom}_R(A, N)$. Por el isomorfismo del Teorema 10.2.2 tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_S(U, H) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}_S(V, H) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}_S(W, H) \arrow[d, "\cong"] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(A \otimes_S U, N) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(A \otimes_S V, N) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(A \otimes_S W, N)
\end{tikzcd}$$

Por la Proposición 4.2.5 los renglones son exactos. Ahora por la Proposición 4.2.6 la sucesión

$$A \otimes_S U \to A \otimes_S V \to A \otimes_S W \to 0$$

es exacta. $\square$

10.3. Módulos Planos

Sea $I \leq R$ un ideal bilateral. Consideremos la inclusión canónica $i : I \to R$. Entonces tenemos el morfismo

$$Id_{R/I} \otimes i : R/I \otimes_R I \to R/I \otimes_R R.$$

Sea $(r + I) \otimes a \in R/I \otimes I$. Entonces

$$(Id_{R/I} \otimes i)((r + I) \otimes a) = (r + I) \otimes a = (r + I)a \otimes 1$$

$$= (ra + I) \otimes 1 = 0 \otimes 1 = 0.$$

Esto es un ejemplo de que al aplicar el funtor $(Id \otimes \_)$ a un monomorfismo, no siempre nos da un monomorfismo.

Lema 10.3.1. *Sea $I \leq R$ un ideal bilateral. Entonces $R/I \otimes_R I \cong I/I^2$*

Demostración. Definimos la función R-tensorial $\varphi : R/I \times I \to I/I^2$ como $\varphi(r+I, a) = ra+I^2$. Lo que nos induce un único morfismo $\lambda : (R/I)\otimes I \to I/I^2$. Se tiene que λ es un epimorfismo ya que si $a+I^2 \in I/I^2$ entonces $\lambda((1+I)\otimes a) = a + I^2$. Supongamos que $\lambda\left(\sum(r_i + I) \otimes a_i\right) = 0$. Entonces $\sum r_i a_i + I^2 = 0$ i.e. $\sum r_i a_i \in I^2$. Así $\sum r_i a_i = \sum a_j a_k$ con $a_j, a_k \in I$. Por lo tanto

$$\sum(r_i + I) \otimes a_i = \sum(1 + I) \otimes r_i a_i = (1 + I) \otimes \sum r_i a_i = (1 + I) \otimes \sum a_j a_k$$

$$= \sum(a_j + I) \otimes a_k = 0.$$

Por lo tanto λ es inyectiva. $\square$

Definición 10.3.2. Sea M_R un R-módulo derecho. Decimos que M es *plano* si para todo monomorfismo $\alpha : A \to B$ de R-módulos izquierdos se tiene que $Id_M \otimes \alpha$ es un monomorfimo.

Lema 10.3.3. *1. Si M_R es plano y $M_R \cong N_R$ entonces N_R es plano.*

2. Sea $M_R = \bigoplus_I M_i$. Entonces, M es plano si y solo si cada M_i es plano.

3. Todo módulo proyectivo es plano.

Demostración. *1.* Es clara.

2. Sea $\alpha : A \to B$ un monomorfismo de R-módulos izquierdos. Por la Proposición 10.1.19, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
(\bigoplus_I M_i) \otimes_R A \arrow[r, "Id_M \otimes \alpha"] \arrow[d, "\cong"'] & (\bigoplus_I M_i) \otimes_R B \arrow[d, "\cong"] \\
\bigoplus_I (M_i \otimes A) \arrow[r, "\bigoplus_I (Id_{M_i} \otimes \alpha)"'] & \bigoplus_I (M_i \otimes B).
\end{tikzcd}$$

Entonces $Id_M \otimes \alpha$ es inyectiva si y sólo si $\bigoplus_I (Id_{M_i} \otimes \alpha)$ es inyectiva si y solo si $Id_{M_i} \otimes \alpha$ es inyectiva para toda $i \in I$.

3. Sea P_R proyectivo. Recordemos que un módulo es proyectivo si y sólo si es sumando directo de un libre (Teorema 6.3.5). Por lo tanto es suficiente probar el resultado para el anillo R.

Sea $\alpha : A \to B$ un monomorfismo. Por el Teorema 10.1.16, tenemos el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} R \otimes_R A \arrow[r, "Id_R \otimes \alpha"] \arrow[d, "\cong"'] & R \otimes_R B \arrow[d, "\cong"] \\ {}_R A \arrow[r, "\alpha"'] & {}_R B. \end{tikzcd}$$

Como α es un monomorfismo, $Id_R \otimes \alpha$ también es monomorfismo. □

Lema 10.3.4. *Sean M_R y ${}_R B$ R-módulos.*

1. *Sea $\sum m_i \otimes b_i \in M \otimes_R B$. Si $\sum m_i \otimes b_i = 0$, entonces existen submódulos $M_0 \leq M$ y $B_0 \leq B$ finitamente generados tales que $0 = \sum m_i \otimes b_i \in M_0 \otimes_R B_0$.*

2. *Sean $M_1 \leq M$ y $B_1 \leq B$. Si $\sum m_i \otimes b_i = 0$ en $M_1 \otimes_R B_1$ entonces $\sum m_i \otimes b_i = 0$ en $M \otimes_R B$.*

Demostración. 1. Tomemos primero como algunos de los generadores de B_0 a los b_i y de M_0 a los m_i que aparecen en $\sum m_i \otimes b_i$. Entonces $\sum m_i \otimes b_i \in B_0 \otimes M_0$. Para probar que este elemento es cero, necesitamos adjuntar más generadores a B_0 y a M_0. Recordemos que

$$M \otimes_R B = \mathbb{Z}^{(M \times B)}/K(M, B)$$

(Definicion 10.1.1) donde $K(M, B)$ depende de M y de B. Si $\sum m_i \otimes b_i = 0$, entonces $\sum (m_i, b_i) \in K(M, B)$. Viendo a $\sum (m_i, b_i)$ como elemento de $K(M, B)$, cada sumando se escribe como una combinacion lineal de los generadores de $K(M, B)$. Como estas combinaciones son finitas, tomamos las coordenandas en M y en B que aparecen en estas combinaciones y las agragamos como generadores de B_0 y M_0 respectivamente. Así tenemos que $\sum (m_i, b_i) \in K(M_0, B_0)$. Por lo tanto $\sum m_i \otimes b_i = 0$ en $M_0 \otimes B_0$.

2. Tomemos las inclusiones $i : M_1 \to M$ y $j : B_1 \to B$ entonces

$$0 = i \otimes j(0) = (i \otimes j) \left(\sum m_i \otimes b_i \right) = \sum m_i \otimes b_i$$

en $M \otimes B$. □

Corolario 10.3.5. *Si M_R es tal que todo submódulo f.g está contenido en un submódulo plano entonces M_R es plano.*

Demostración. Sea $\alpha : A \to B$ un monomorfismo de R-módulos izquierdos. Supongamos que $(Id_M \otimes \alpha) (\sum m_i \otimes a_i) = 0$. Entonces $\sum m_i \otimes \alpha(a_i) = 0$. Por el Lema 10.3.4.*1* existe un submódulo $M_0 \leq M$ finitamente generado tal que $\sum m_i \otimes \alpha(a_i) = 0$ en $M_0 \otimes B$. Por hipótesis existe $M_1 \leq M$ plano tal que $M_0 \leq M_1$. Así $Id_{M_1} \otimes \alpha$ es un monomorfismo y $Id_{M_1} \otimes \alpha (\sum m_i \otimes a_i) = \sum m_i \otimes \alpha(a_i) = 0$, lo que implica que $\sum m_i \otimes a_i = 0$ en $M_1 \otimes A$. Por el Lema 10.3.4.*2* $\sum m_i \otimes a_i = 0$ en $M \otimes A$. □

Corolario 10.3.6. *Sea M_R un R-módulo y $\alpha : A \to B$ un morfismo de R-módulos izquierdos tal que $Id_M \otimes \alpha$ no es mono entonces existe $A_0 \leq A$ f.g. tal que $Id_M \otimes \alpha|_{A_0}$ no es monomorfismo.*

Demostración. Sea $0 \neq \sum m_i \otimes a_i$ tal que $(Id_M \otimes \alpha)(\sum m_i \otimes a_i) = 0$. Si A_0 es el submódulo de A generado por los a_i que aparecen en la suma $\sum m_i \otimes a_i$ entonces $\sum m_i \otimes a_i \neq 0$ en $M \otimes_R A_0$ y $(Id_M \otimes \alpha|_{A_0})(\sum m_i \otimes a_i) = 0$. □

Sea ${}_{\mathbb{Z}}D$ un cogenerador inyectivo. Recordeoms que si M_R es un R-módulo derecho, entonces $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, D)$ tiene estructura de R-módulo izquierdo.

Teorema 10.3.7. *Son equivalentes para un R-módulo M_R:*

1. *M_R es plano.*
2. *${}_RM^o := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, D)$ es inyectivo.*
3. *Si ${}_RA \leq R$ es un ideal izquierdo f.g. entonces $Id_M \otimes i$ es un monomorfismo, donde $i : A \to R$ es la inclusión canónica.*

Demostración. *1* ⇔ *2*. Sea $\alpha : A \to B$ un monomorfismo de R-módulos izquierdos. Por el Teorema 6.6.19, $Id_M \otimes \alpha$ es un monomorfismo si y solo si

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(Id_M \otimes \alpha, Id_D) : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R B, D) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R A, D)$$

es un epimorfismo. Por el Teorema 10.2.2 esto es equivalente a que el morfismo

$$\mathrm{Hom}_R(\alpha, Id) : \mathrm{Hom}_R(B, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, D)) \to \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, D)$$

sea un epimorfismo. Por lo tanto M_R es plano si y solo si ${}_RM^o$ es inyectivo.

1 ⇒ *3*. Es clara.

3 ⇒ *2*. Si $Id_M \otimes i$ es un monomorfismo entonces, por lo observado arriba se tiene que

$$\mathrm{Hom}_R(i, Id) : \mathrm{Hom}_R(R, M^o) \to \mathrm{Hom}_R(A, M^o)$$

es suprayectiva. Por el criterio de Baer ${}_RM^o$ es inyectivo. □

Teorema 10.3.8. *Son equivalentes para un anillo R:*

(a) *Todo R-módulo derecho M_R es plano.*

(b) *R es regular de von Neumann.*

(c) *Todo ideal izquierdo cíclico de R es sumando directo.*

(d) *Todo ideal izquierdo f.g. de R es sumando directo.*

Demostración. (a)⇒(b). Sea $r \in R$ y consideremos $\iota : Rr \to R$ la inclusión. Por hipótesis

$$Id_{R/rR} \otimes \iota : R/rR \otimes_R Rr \to R/rR \otimes_R R$$

es inyectiva. Así $0 = (1 + rR) \otimes r \in R/rR \otimes_R Rr$ ya que

$$(Id_{R/rR} \otimes \iota)((1 + rR) \otimes r) = (1 + rR) \otimes r = (r + rR) \otimes 1 = 0.$$

Consideremos rRr y definamos la función R-tensorial $\varphi : (R/rR) \times Rr \to (Rr/rRr)$ como $\varphi(y + rR, xr) = yxr + rRr$. Por la propiedad universal del tensor, tenemos un $\mathbb{Z}$-morfismo $\lambda : (R/rR) \otimes_R Rr \to (Rr/rRr)$.

Por lo tanto $0 = \lambda(0) = \lambda((1 + rR) \otimes r) = r + rRr$, es decir, existe $x \in R$ tal que $r = rxr$.

(b)⇒(c). Sea $r \in R$. Por hipótesis existe $x \in R$ tal que $r = rxr$. Así que $xr = xrxr$, es decir, xr es idempotente. Por lo tanto $R = R(xr) \oplus R(1 - xr)$. Además, $Rr \leq R(rxr) \leq R(xr)$. Por lo tanto $Rr = R(xr)$.

(c)⇒(d). Sea $I = Ra_1 + \cdots Ra_n$ un ideal de R. Para demostrar que I está generado por un idempotente lo haremos por inducción sobre n.

Para $n = 1$ es la hipótesis. Supongamos que $n > 1$ y que el resultado es valido para $n - 1$. Sea $I = Ra_1 + \cdots Ra_n$. Por hipóteis de inducción existe un idempotente $e \in R$ tal que $Re = Ra_1 + \cdots Ra_{n-1}$, entonces $I = Re + Ra_n$.

Tenemos que $a_n = a_n e - a_n(1 - e)$ entonces $I = Re + Ra_n e + Ra_n(1 - e) = Re + Ra_n(1 - e)$. Por la base de inducción, existe un idempotente $f \in R$ tal que $Ra_n(1 - e) = Rf$. Esto implica que $fe = xa_n(1 - e) - e = xa_n e - xa_n e = 0$.

Sea $g = (1 - e)f + e$. Se puede ver que g es idempotente y además $Reg = Re$ y $Rfg = Rf$. Por lo tanto $Re + Rf \leq Rg$ y la otra contesión simpre se tiene, así que $I = Rg$.

(d)⇒(a). Sea M_R un R-módulo e $I \leq R$ un ideal izquierdo f.g. Por hipótesis $I = Re$ con e un idempotente. Si $\iota : I \to R$ es la inclusión canónica, tenemos el morfismo

$$(Id_M \otimes \iota) : M \otimes_R Re \to M \otimes_R R$$

definido como

$$(Id_M \otimes \iota)\left(\sum(m_i \otimes r_i e)\right) = (Id_M \otimes \iota)\left(\sum(m_i r_i e \otimes e)\right) = \sum(m_i r_i e \otimes e)$$

$$= \sum(m_i r_i e \otimes 1).$$

Si $\sum(m_i r_i e \otimes 1) = 0$, por el isomorfismo $M \otimes_R R \cong M$ se tiene que $\sum(m_i r_i e) = 0$ lo que implica, otra vez por el isomorfismo, que $\sum(m_i \otimes r_i e) = 0$. Por lo tanto $Id_M \otimes \iota$ es inyectiva. Por el Teorema 10.1.3 M_R es plano. □

10.4. Cocientes Planos de Módulos planos

Lema 10.4.1. *Sea $U \leq M_R$ con M_R plano. Sean $A \leq R$ un ideal izquierdo de R e $i : A \to R$ la inclusión canónica. Son equivalentes*

(a) $(Id_{M/U} \otimes i) : (M/U) \otimes_R A \to (M/U) \otimes_R R$ *es un monomorfismo.*

(b) $U \cap MA = UA$.

Demostración. (a)⇒(b). Sea $u = \sum m_i a_i \in MA \cap U$ y consideremos $t = \sum(m_i + U) \otimes a_i \in (M/U) \otimes_R A$. Entonces

$$(Id_{M/U} \otimes i)(t) = \sum(m_i + U) \otimes a_i = \sum(m_i + U)a_i \otimes 1 = \sum(a_i m_i + U) \otimes 1$$

$$= (u + U) \otimes 1 = 0 \in (M/U) \otimes_R R.$$

Así, por hipótesis tenemos que $t = 0$. Consideremos la función R-tensorial $\varphi : (M/U) \times A \to MA/UA$ definida como $\varphi(m + U, a) = ma + UA$. Por lo tanto existe un morfismo $\lambda : (M/U) \otimes_R A \to MA/UA$, dado por la propiedad universal del tensor, tal que

$$0 = \lambda(0) = \lambda(t) = \lambda\left(\sum(m_i + U) \otimes a_i\right) = \sum m_i a_i + UA = u + UA.$$

Por lo tanto $u \in UA$.

(b)⇒(a). Sea $\sum(m_i + U) \otimes a_i \in (M/U) \otimes_R A$ tal que

$$(Id_{M/U} \otimes i) \left(\sum(m_i + U) \otimes a_i\right) = \sum(m_i + U) \otimes a_i = \sum(m_i a_i + U) \otimes 1 = 0$$

Usando el isomorfismo $(M/U) \otimes_R R \cong (M/U)$, se tiene que $\sum(m_i a_i + U) = 0$ es decir $\sum m_i a_i \in U$. Por hipótesis $\sum m_i a_i = \sum u_j b_j \in UA$. Entonces

$$(Id_M \otimes i) \left(\sum(m_i \otimes a_i) - \sum(u_j \otimes b_j)\right) = \sum(m_i a_i \otimes 1) - \sum(u_j b_j \otimes 1)$$

$$= \left(\sum m_i a_i - \sum u_j b_j\right) \otimes 1 = 0 \otimes 1 = 0.$$

Por hipótesis M_R es plano, así que $\sum(m_i \otimes a_i) - \sum(u_j \otimes b_j) = 0$, i.e. $\sum(m_i \otimes a_i) = \sum(u_j \otimes b_j)$. Ahora, si $\pi : M \to M/U$ es la proyección canónica entonces

$$\sum(m_i + U) \otimes a_i = (\pi \otimes Id_A) \left(\sum m_i \otimes a_i\right)$$

$$= (\pi \otimes Id_A) \left(\sum u_j \otimes b_j\right) = \sum(u_j + U) \otimes b_j = 0.$$

Por lo tanto $Id_{M/U} \otimes i$ es un monomorfismo. □

El siguiente ejemplo muestra que si M_R no es plano, la equivalencia anterior puede no ser cierta. Cabe mencionar que en la implicación (a)⇒(b) de la Proposición anterior no se usa que M_R sea plano.

Ejemplo 10.4.2. Sean m y n enteros distintos de cero, tales que $\mathrm{mcd}(m, n) \neq 1$. Sea $M = \mathbb{Z}_n$, $A = n\mathbb{Z}$ y $U = m\mathbb{Z}_n$. Entonces $U \cap AM = 0 = AU$. Por otro lado el morfismo $(Id_{M/U} \otimes i) : M/U \otimes_{\mathbb{Z}} n\mathbb{Z} \to M/U \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$ no es inyectivo, ya que

$$Id_{M/U} \otimes i(\bar{b} \otimes na) = \bar{b} \otimes na = \overline{bn} \otimes a = 0.$$

Teorema 10.4.3. *Sea M_R un R-módulo plano y $U \leq M$. Son equivalentes:*

(a) *M/U es plano*

(b) *$U \cap MA = UA$ para todo ideal izquierdo f.g. $A \leq R$.*

Demostración. Por la Proposición 10.4.1. $U \cap MA = UA$ para todo ideal izquierdo f.g. $A \leq R$ si y solo si $(Id_{M/U} \otimes i) : (M/U) \otimes_R A \to (M/U) \otimes_R R$ es un monomorfismo si y solo si M/U es plano por el Teorema 10.3.7. □

Teorema 10.4.4. *Sean P_R proyectivo y $U_R \leq \mathrm{Rad}(P)$ tal que P/U es plano. Entonces $U = 0$.*

Demostración. Primero veamos el resultado para módulos libres. Sea F_R un R-módulo libre con base $\{x_i\}_I$ y sea $U \leq \mathrm{Rad}(F)$ tal que F/U es plano. Tomemos $u \in U$ y lo escribimos en terminos de la base $u = \sum x_i a_i$ con $a_i \in R$.

Sea $A = \sum R a_i$, el ideal izquierdo generado por los coeficientes de u. Por el Teorema 10.4.3 $U \cap FA = UA$ así que $u = \sum u_j b_j \in UA$ con $b_j \in A$. Como $\mathrm{Rad}(F) = FRad(R)$, cada u_j se escribe como $u_j = \sum f_{jk} c_{jk}$ con $c_{jk} \in \mathrm{Rad}(R)$ y $f_{jk} \in F$. Si representamos cada f_{jk} en terminos de la base y usando que $\mathrm{Rad}(R)$ es bilateral podemos suponer que

$$u_j = \sum x_k c_{jk}$$

con $c_{jk} \in \mathrm{Rad}(R)$. Se sigue que

$$u = \sum x_i a_i = \sum u_j b_j = \sum \sum x_k c_{jk} b_j.$$

Comparando coeficientes $a_i = \sum c_{ji} b_j \in \mathrm{Rad}(R)A$. Como tenemos esto para cada generador de A, entonces $A \leq \mathrm{Rad}(R)A \leq A$. Por lo tanto $A = \mathrm{Rad}(R)A$. Por la Proposición 9.2.7.*6* se tiene que $A = 0$, lo que implica que $u = 0$. Por lo tanto $U = 0$.

Ahora probemos el resultado para un proyecivo P_R. Como P es proyectivo entonces P es umando directo de un libre, es decir, existe F_R libre tal que $F = P \oplus P_1$. Sea $U \leq \mathrm{Rad}(P)$ tal que P/U es plano. Sea $\pi : F \to F/U$ la proyección canónica. Entonces

$$F/U = \pi(F) = \pi(P) + \pi(P_1) = (P+U)/U + (P_1+U)/U = P/U + (P_1+U)/U.$$

Sea $x + U = (y + u) + U \in (P/U) \cap ((P_1 + U)/U)$. Entonces $x - (y + u) \in U$, así que $x - y \in U \leq P$. Por lo tanto $y \in P \cap P_1 = 0$. Así

$$F/U = P/U \oplus (P_1 + U)/U \cong P/U \oplus P_1/(P_1 \cap U) = P/U \oplus P_1.$$

Tenemos que P_1 es plano por ser proyectivo (Lemma 10.3.3) y P/U es plano por hipótesis, así que F/U es plano. Por otro lado $U \leq \mathrm{Rad}(P) \leq \mathrm{Rad}(F)$. Entonces estamos en el caso de un módulo libre, por lo tanto $U = 0$. $\square$

Capítulo 11

Anillos Perfectos

Recordemos que en la Sección 6.4 se probó que todo módulo tiene cápsula inyectiva (Teorema 6.4.8) pero en la observación 6.4.11 se vio que no siempre hay cubiertas proyectivas. Este capítulo estará destinado a desarrollar los conceptos y la teoría de anillos sobre los cuales todo módulo tiene cubierta proyectiva. A tales anillos se les llama *perfectos*.

11.1. Módulos semiperfectos

Proposición 11.1.1. *Sea ${}_RN$ un R-módulo y supongamos que N tiene cubierta proyectiva. Si $\sigma : P \to N$ es un epimorfismo con P proyectivo entonces $P = P_1 \oplus P_2$ con $P_2 \leq \operatorname{Ker}\sigma$ y $\sigma|_{P_2} : P_1 \to N$ cubierta proyectiva.*

Demostración. Sea $\tau : P_0 \to N$ cubierta proyectiva de N. Como P es proyectivo existe $\kappa : P \to P_0$ tal que $\tau\kappa = \sigma$. Sea $x \in P_0$, entonces existe $y \in P$ tal que $\tau(x) = \sigma(y) = \tau\kappa(y)$ así que $x - \kappa(y) \in \operatorname{Ker}\tau$. De esto, $x = \kappa(y) + (x - \kappa(y)) \in \operatorname{Im}\kappa + \operatorname{Ker}\tau$, lo que implica que $P_0 = \operatorname{Im}\kappa + \operatorname{Ker}\tau$ pero $\operatorname{Ker}\tau << P_0$ así que $\operatorname{Im}\kappa = P_0$. Por lo tanto κ es suprayectiva y como P_0 es proyectivo se escinde, es decir, $P = \operatorname{Ker}(\kappa) \oplus P_1$. Esto implica que $\kappa|_{P_1} : P_1 \to P_0$ es un isomorfismo.

Por otro lado, $\operatorname{Ker}\tau\kappa|_{P_1} = (\kappa|_{P_1})^{-1}(\operatorname{Ker}\tau) << P_1 < P$, por lo tanto $\sigma|_{P_1} = \tau\kappa|_{P_1} : P_1 \to N$ es cubierta proyectiva. Poniendo $P_2 = \operatorname{Ker}\kappa$, se tiene que $P_2 \leq \operatorname{Ker}\sigma$. □

Corolario 11.1.2. *Sea P proyectivo y $U \leq P$. Si P/U tiene cubierta proyectiva entonces $P = P_1 \oplus P_2$ con $P_2 \leq U$ y $P_1 \cap U << P_1$.*

Demostración. Consideremos $\pi : P \to P/U$ la proyección canónica. Por la Proposición 11.1.1 $P = P_1 \oplus P_2$ con $P_2 \leq \operatorname{Ker}\pi = U$ y $\pi|_{P_1} : P_1 \to P/U$ cubierta proyectiva, así que $P_1 \cap U = \operatorname{Ker}\pi|_{P_1} << P_1$. □

Definición 11.1.3. Sea ${}_RM$ un R-módulo.

1. Decimos que M es *semiperfecto* si todo cociente de M tiene cubierta proyectiva.

2. Decimos que M es *suplementado* si todo submódulo de M tiene suplemento.

Lema 11.1.4. *1. Todo cociente de un semiperfecto es semiperfecto.*

2. Toda cubierta proyectiva (si existe) de un simple es semiperfecta.

Demostración. 1. Sea N un cociente de M. Solo notemos que todo cociente de N es cociente de M.

2. Sea $\tau : P \to S$ cubierta proyectiva con S simple. Entonces $\operatorname{Ker}\tau << P$. Además $P/\operatorname{Ker}\tau \cong S$ así que $\operatorname{Ker}\tau$ es máximo en P. Sea $U < P$, como $\operatorname{Ker}\tau << P$ entonces $U + \operatorname{Ker}\tau < P$ pero $\operatorname{Ker}\tau$ es máximo así que $U \leq \operatorname{Ker}\tau$ entonces $U << P$. Por lo tanto $\pi : P \to P/U$, la proyección canónica, es cubierta proyectiva de P/U. □

Lema 11.1.5. *Sea $A \leq M$. Si $A^\bullet$ es suplemento de A y $A^{\bullet\bullet}$ es suplemento de $A^\bullet$, entonces $A^\bullet$ también es suplemento de $A^{\bullet\bullet}$.*

Demostración. Por hipótesis $M = A^\bullet + A^{\bullet\bullet}$. Sea $U \leq A^\bullet$ tal que $M = U + A^{\bullet\bullet}$. Entonces

$$A^\bullet = M \cap A^\bullet = (U + A^{\bullet\bullet}) \cap A^\bullet = U + (A^\bullet \cap A^{\bullet\bullet})$$

Como $M = A + A^\bullet$, $M = A + U + (A^\bullet \cap A^{\bullet\bullet})$. Por el Lemma 9.2.11 $(A^\bullet \cap A^{\bullet\bullet}) << A^{\bullet\bullet} < M$. Entonces $(A^\bullet \cap A^{\bullet\bullet}) << M$ lo que implica que $M = A + U$. Pero $U \leq A^\bullet$ así que $U = A^\bullet$. Por lo tanto $A^\bullet$ es suplemento de $A^{\bullet\bullet}$. □

Proposición 11.1.6. *Todo cociente de un módulo suplementado es suplementado.*

Demostración. Sea C un módulo suplementado y $f : C \to M$ un epimorfismo. Sea $A \leq M$ y concideremos $f^{-1}(A) \leq C$. Como C es suplementado existe $B \leq C$ suplemento de $f^{-1}(A)$. Afirmamos que $f(B)$ es suplemento de A. Tenemos que $C = B + f^{-1}(A)$, entonces

$$M = f(C) = f(B + f^{-1}(A)) = f(A) + A.$$

Como B es suplemento de $f^{-1}(A)$, $f^{-1}(A) \cap B << B$ así que $f(B \cap f^{-1}(A)) << f(B)$. Sea $a \in f(B) \cap A$ entonces $f(b) = a$ con $a \in A$ y $b \in B$. Esto implica que $b \in f^{-1}(A)$ y $f(b) \in f(f^{-1}(A) \cap B)$. Por lo tanto $f(B \cap f^{-1}(A)) = f(B) \cap A$. Así que $f(B) \cap A << f(B)$, es decir, $f(B)$ es un suplemeno de A. Por lo tanto M es suplementado. □

Proposición 11.1.7. *Sea $\varphi : P \to M$ cubierta proyectiva de M. Son equivalentes:*

(a) *M es semiperfecto.*

(b) *P es semiperfecto.*

(c) *P es suplementado.*

Demostración. (b)⇒(a). Por el Lema 11.1.4.

(a)⇒(c). Sea $A \leq P$. Sea $\pi : M \to M/\varphi(A)$ la proyección canónica. Sea $\sigma = \pi\varphi$, que es un epimorfismo. Entonces por la Proposición 11.1.1 existe $P_1 \leq P$ un sumando directo tal que $\sigma_1 = \sigma|_{P_1} : P_1 \to M/\varphi(A)$ es una cubierta proyectiva. Afirmamos que P_1 es un suplemento de A. Como $\sigma(P_1) = M/\varphi(A)$, $P = P_1 + \operatorname{Ker}\sigma$. Tenemos que

$$\operatorname{Ker}\sigma = \operatorname{Ker}\pi\varphi = \varphi^{-1}(\operatorname{Ker}\pi) = \varphi^{-1}(\varphi(A)) = A + \operatorname{Ker}\varphi$$

Lo que implica que $P = P_1 + A + \operatorname{Ker}\varphi$ pero $\operatorname{Ker}\varphi << P$ así que $P = P_1 + A$.

Supongamos ahora que existe $U \leq P_1$ tal que $P = A + U$. Entonces $\sigma(P) = \sigma(P_1) = \sigma_1(U)$ ya que $\sigma_1(A) = 0$, por lo tanto $P_1 = \sigma_1^{-1}(\sigma_1(P_1)) = \sigma_1^{-1}(\sigma_1(U)) = U + \operatorname{Ker}\sigma_1$ pero $\operatorname{Ker}\sigma_1 << P_1$ así que $P_1 = U$. Por lo tanto P_1 es suplemento de A en P.

(c)$\Rightarrow$(b). Sea $\sigma : P \to N$ un epimorfismo. Sea $A = \operatorname{Ker}\sigma$. Sea B suplemento de A en P. Entonces $A \cap B << B$. Sea C un suplemento de B en P. Consideremos $\pi : P \to P/B \cap C$ la proyección canónica. Sean $\overline{P} = \pi(P)$, $\overline{B} = \pi(B)$ y $\overline{C} = \pi(C)$. Entonces $\overline{P} = \overline{B} \oplus \overline{C}$. Sea $\nu : \overline{P} \to \overline{B}$ la proyección canónica.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\varphi"'] \arrow[d, "\nu\pi"] \\ B \arrow[r, "\pi_1=\pi|_B"'] & \overline{B} \end{tikzcd}$$

Como P es proyectivo, existe $\varphi : P \to B$ tal que $\pi_1\varphi = \nu\pi$. Entonces $\nu\pi(B) = \overline{B} = \pi_1\varphi(B)$. Lo que implica que $B = \varphi(B) + \operatorname{Ker}\pi_1$. Notemos que $\operatorname{Ker}\pi_1 = B \cap C$ es cual es superfluo en B por el Lemma 11.1.5. Por lo tanto $B = \varphi(B)$. Así, $P = B + \operatorname{Ker}\varphi$. Por otro lado, $\operatorname{Ker}\varphi \subseteq \operatorname{Ker}\nu\pi \subseteq C$. Por la minimalidad de C, se tiene que $\operatorname{Ker}\varphi = C$. Ahora,

$$C = \operatorname{Ker}\nu\pi = \operatorname{Ker}\pi_1\varphi = \varphi^{-1}(\operatorname{Ker}\pi_1) = \varphi^{-1}(B \cap C),$$

pero como φ es un epimorfismo, $0 = \varphi(C) = \varphi\varphi^{-1}(B \cap C) = B \cap C$. Esto prueba que B es un sumando directo de P, y por lo tanto es proyectivo. Ademas $\sigma|_B : B \to N$ es un epimorfismo y por construcción $\operatorname{Ker}\sigma|_B = B \cap A << B$. Por lo tanto P es semiperfecto. $\square$

Corolario 11.1.8. *Todo módulo Artiniano proyectivo es semiperfecto.*

Demostración. Sea P Artiniano y proyectivo. Entonces $Id_P : P \to P$ es cubierta proyectiva. Sea $N \leq P$ y consideremos $\Gamma = \{A \leq P \mid N + A = P\}$. $\Gamma \neq \emptyset$ ya que $P \in \Gamma$. Como P es Artiniano Γ tiene minimos, por lo tanto P es suplementado. Por la Proposición 11.1.7 P es semiperfecto. $\square$

Ejemplo 11.1.9. Sea

$$R = \begin{pmatrix} \mathbb{Q} & 0 \\ \mathbb{R} & \mathbb{R} \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$R = \begin{pmatrix} \mathbb{Q} & 0 \\ \mathbb{R} & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{R} \end{pmatrix}.$$

Consideremos el ideal izquierdo de R

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbb{R} & \mathbb{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbb{R} & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{R} \end{pmatrix}.$$

Entoneces I es la suma de dos simples proyectivos isomorfos. Por lo tanto I es Artiniano y proyectivo. Por lo tanto I es semiperfecto.

Proposición 11.1.10. *Sea M semiperfecto. Entonces:*

1. *M es suplementado.*

2. *$M/\operatorname{Rad}(M)$ es semisimple.*

3. $\operatorname{Rad}(M) << M$.

Demostración. 1. Como M es semiperfecto, M tiene cubierta proyectiva $P \to M$. Por la Proposición 11.1.7 P es suplementado. Como cocientes de suplementados son suplementados entonces M lo es.

2. Por el inciso anterior M es suplementado así que $M/\operatorname{Rad}(M)$ también. Sea $N \leq M/\operatorname{Rad}(M)$ y $N^\bullet$ un suplemento de N. Así $M/\operatorname{Rad}(M) = N + N^\bullet$ y $N \cap N^\bullet << N^\bullet$. Entonces $N \cap N^\bullet << M/\operatorname{Rad}(M)$ y como el radical es la suma de los superfluos, $N \cap N^\bullet \leq \operatorname{Rad}\left(\frac{M}{\operatorname{Rad}(M)}\right) = 0$. Por lo tanto N es sumando directo de $M/\operatorname{Rad}(M)$.

3. Por hipótesis existe $\xi : P \to M$ cubierta proyectiva con P es semiperfecto (Proposición 11.1.7). Como $\operatorname{Ker}\xi << P$, $\operatorname{Ker}\xi \leq \operatorname{Rad}(P)$. Sea $\pi : P \to P/\operatorname{Rad}(P)$ la proyección canónica. Entoneces $P/\operatorname{Rad}(P)$ es semiperfecto, así que tiene cubierta proyectiva. Por la Proposición 11.1.2 existe una descomposición $P = P_1 \oplus P_2$ tal que $P_2 \leq \operatorname{Rad}(P)$ y $P_1 \cap \operatorname{Rad}(P) << P_1$. Como $P/P_2 = P_1$ es proyectivo entonces es plano. Por el Teorema 10.4.4 $P_2 = 0$, lo que implica que $\operatorname{Rad}(P) << P$. Ahora, como ξ es un epimorfismo superfluo por el Lema 6.1.4 y el Teorema 9.2.5, $\xi(\operatorname{Rad}(P)) = \operatorname{Rad}(M) << M$. □

11.2. Levantamiento de Descomposiciones

Definición 11.2.1. Sea $\alpha : A \to M$ con $M = \bigoplus_I M_i$. Decimos que la descomposición de M se *levanta respecto a* α si $A = \bigoplus_I A_i$ tal que $\alpha(A_i) = M_i$ para toda $i \in I$. Si α es la proyección canónica en un cociente entonces solo decimos que *la descomposición puede ser levantada.*

Proposición 11.2.2. *Sea $\xi : P \to M$ cubierta proyectiva con $M = \bigoplus_I M_i$. Supongamos que para cada $i \in I$ existe $\alpha_i : A_i \to M_i$ con A_i proyectivo tal que* $\operatorname{Ker}\alpha_i \leq \operatorname{Rad}(A_i)$. *Entonces la descomposición de M se levanta respecto a ξ.*

Demostración. Como cada A_i es proyectivo entonces $\bigoplus_I A_i$ es proyectivo. Por lo tanto existe $\varphi : \bigoplus_I A_i \to P$ tal que $\xi\varphi = \bigoplus_I \alpha_i$.

$$\begin{tikzcd} & \bigoplus_I A_i \arrow[dl, dashed, "\varphi"'] \arrow[d, "\bigoplus_I \alpha_i"] \\ P \arrow[r, two heads, "\xi"'] & M. \end{tikzcd}$$

Como $\bigoplus_I \alpha_i$ es sobre y $\operatorname{Ker}\xi << P$, φ es sobre. Así que φ se escinde porque P es proyectivo, es decir, $\bigoplus_I A_i = \operatorname{Ker}\varphi \oplus P_0$. Tenemos que

$$\operatorname{Ker}\varphi \leq \operatorname{Ker}(\bigoplus_I \alpha_i) = \bigoplus_I \operatorname{Ker}\alpha_i \leq \bigoplus_I \operatorname{Rad}(A_i) = \operatorname{Rad}(\bigoplus_I A_i).$$

Por otro lado $\bigoplus_I A_i/\operatorname{Ker}\varphi \cong P_0 \cong P$ así que $\bigoplus_I A_i/\operatorname{Ker}\varphi$ es proyectivo y por lo tanto plano. Por el Teorema 10.4.4 $\operatorname{Ker}\varphi = 0$. Por lo tanto $P = \bigoplus_I \varphi(A_i)$ y $\xi\varphi(A_i) = \alpha_i(A_i) = M_i$. □

Corolario 11.2.3. *Sea $\xi : P \to M$ cubierta proyectiva de M con M semiperfecto. Entonces toda descomposición de M se puede levantar respecto a ξ.*

Demostración. Sea $M = \bigoplus_I M_i$. Como cada M_i es cociente de M entonces para cada $i \in I$ existe $\alpha_i : P_i \to M_i$ cubierta proyectiva. Como $\operatorname{Ker} \alpha_i << P_i$ entonces $\operatorname{Ker} \alpha_i \leq \operatorname{Rad}(P_i)$. Por la Proposición 11.2.2 la descomposición se puede levantar respecto a ξ. □

Corolario 11.2.4. *Si P es proyectivo y semiperfecto, entonces toda descomposición de $P/\operatorname{Rad}(P)$ puede ser levantada.*

Demostración. Como P es semiperfecto, por la Proposición 11.1.10 $\operatorname{Rad}(P) << P$. Entonces $\pi : P \to P/\operatorname{Rad}(P)$ es cubierta proyectiva. Como P es semiperfecto entonces $P/\operatorname{Rad}(P)$ es semiperfecto. Por el Corolario 11.2.3 toda descomposición de $P/\operatorname{Rad}(P)$ se puede levantar. □

Observación 11.2.5. Si P es semiperfecto, por la Proposición 11.1.10 $P/\operatorname{Rad}(P) = \bigoplus_I S_i$ con S_i simple, entonces existe una descomposición $P = \bigoplus_I A_i$ con $\pi(A_i) = S_i$.

Proposición 11.2.6. *Son equivalentes para P proyectivo:*

(a) *P es semiperfecto.*

(b) *P es suplementado.*

(c) *Se satisface que:*

1. *$P/\operatorname{Rad}(P)$ es semisimple.*
2. *Todo sumando directo de $P/\operatorname{Rad}(P)$ es la imagen de un sumando directo de P respecto a $\pi : P \to P/\operatorname{Rad}(P)$.*
3. *$\operatorname{Rad}(P) << P$.*

Demostración. (a)⇔(b). Por la Proposición 11.1.7.

(a)⇒(c). Por la Proposición 11.1.10 y la Observación 11.2.5.

(c)⇒(b). Sea $A \leq P$. Por hipótesis $P/\operatorname{Rad}(P)$ es semisimple, así que $P/\operatorname{Rad}(P) = \pi(A) \oplus B$. Por *2* existe P_1 sumando directo de P tal que $\pi(P_1) = B$. Tenemos que

$$P/\operatorname{Rad}(P) = \pi(A) \oplus B = \pi(A) \oplus \pi(P_1) = \frac{A + \operatorname{Rad}(P)}{\operatorname{Rad}(P)} \oplus \frac{P_1 + \operatorname{Rad}(P)}{\operatorname{Rad}(P)}.$$

Entonces $P = A + P_1 + \operatorname{Rad}(P)$, pero por *3*, $\operatorname{Rad}(P) << P$, así que $P = A + P_1$. Por otro lado

$$\pi(P_1 \cap A) = \frac{(A \cap P_1) + \operatorname{Rad}(P)}{\operatorname{Rad}(P)} \leq \frac{A + \operatorname{Rad}(P)}{\operatorname{Rad}(P)} \cap \frac{P_1 + \operatorname{Rad}(P)}{\operatorname{Rad}(P)} = 0.$$

Entonces $A \cap P_1 \leq \operatorname{Rad}(P)$ y así $P_1 \cap A << P$. Tenemos que $P = P_1 \oplus L$ para algún $L \leq P$. Consideremos $\rho : P \to P_1$ la proyección canónica. Entonces $P_1 \cap A = \rho(P_1 \cap A) << P_1$. Por el Lema 9.2.11, P_1 es suplemento de A. □

Proposición 11.2.7. *Son equivalentes para un anillo R.*

(a) *${}_R R$ es semiperfecto,*

(b) *R satisface:*

1. *$R/\operatorname{Rad}(R)$ es semisimple.*
2. *Para todo idempotente $\varepsilon \in R/\operatorname{Rad}(R)$ existe $e \in R$ idempotente tal que $e + \operatorname{Rad}(R) = \varepsilon$.*

Demostración. (a)$\Rightarrow$(b). *1* se sigue de la Proposición 11.1.10.

Sea $\overline{R} = R/\operatorname{Rad}(R)$. Sea $\varepsilon \in \overline{R}$ un idempotente. Entonces $\overline{R}\varepsilon$ es sumando directo. Por la Proposición 11.2.6 existe un sumando directo Re de R tal que $\pi(Re) = \overline{R}\varepsilon$ y además $\pi(R(1-e)) = \overline{R}(1-\varepsilon)$. Como $1 = \varepsilon + (1-\varepsilon)$ entonces $\overline{e} - \overline{e}\varepsilon = \overline{e}(1-\varepsilon)$ entonces $\overline{e} = \overline{e}\varepsilon$. De la misma manera $(1-\overline{e})(1-\varepsilon) = (1-\overline{e})$. También $1-\overline{e} = (1-\overline{e})\varepsilon + (1-\overline{e})(1-\varepsilon)$, así que $(1-\overline{e})\varepsilon = 0$. Como $1 = \overline{e} + (1-\overline{e})$, $\varepsilon = \overline{e}\varepsilon + (1-\overline{e})\varepsilon = \overline{e}\varepsilon$. Por lo tanto $\overline{e} = \overline{e}\varepsilon = \varepsilon$.

(a)$\Leftarrow$(b). Como R es f.g., $\operatorname{Rad}(R) << R$. Por la Proposición 11.2.6 ${}_RR$ es semiperfecto. ☐

Corolario 11.2.8. *${}_RR$ es semiperfecto si y solo si R_R es semiperfecto.*

Observación 11.2.9. Por el corolario anterior, sin perdida de generalidad diremos *anillo semiperfecto* sin indicar el lado, cuando ${}_RR$ o R_R sean módulos semiperfectos.

Teorema 11.2.10. *Sea $\{P_i\}_I$ una familia de módulos proyectivos semiperfectos. Entonces $\bigoplus_I P_i$ es semiperfecto si y solo si $\operatorname{Rad}(\bigoplus_I P_i) << \bigoplus_I P_i$.*

Demostración. $\Rightarrow$ Se sigue de la Proposición 11.1.10.

$\Leftarrow$ Probemos las condiciones *1*, *2* y *3* de la Proposición 11.2.6(c). El inciso *3* es la hipótesis. Para *1*, notemos que $\bigoplus_I P_i/\operatorname{Rad}(\bigoplus_I P_i) \cong \bigoplus_I (P_i/\operatorname{Rad}(P_i))$. Como P_i es semiperfecto, $P_i/\operatorname{Rad}(P_i)$ es semisimple por lo que $\bigoplus_I P_i/\operatorname{Rad}(\bigoplus_I P_i)$ es semisimple. Para *2*, consideremos un simple S de la descomposición del módulo $\bigoplus_I P_i/\operatorname{Rad}(\bigoplus_I P_i) \cong \bigoplus_I (P_i/\operatorname{Rad}(P_i))$. Entonces existe $i \in I$ tal que S es un sumando directo de $P_i/\operatorname{Rad}(P_i)$. Como P_i es simperfecto, entonces S tiene cubierta proyectiva. Si $\bigoplus_I P_i/\operatorname{Rad}(\bigoplus_I P_i) \cong \bigoplus_J S_j$, por lo anterior, cada S_j tiene una cubierta proyectiva, digamos $\xi_j : A_j \to S_j$. Como $\operatorname{Rad}(\bigoplus_I P_i) << \bigoplus_I P_i$, la proyeción canónica $\pi : \bigoplus_I P_i \to \bigoplus_I P_i/\operatorname{Rad}(\bigoplus_I P_i)$ es una cubierta poyectiva. Se sigue de la Proposición 11.2.2 que la descompoción $\bigoplus_I P_i/\operatorname{Rad}(\bigoplus_I P_i) \cong \bigoplus_J S_j$ se levanta a $\bigoplus_I P_i$ y por lo tanto tenemos *2*. ☐

Corolario 11.2.11. *1. Toda suma directa finita de semiperfectos es semiperfecto.*

2. R es semiperfecto si y solo si todo módulo izquierdo (o derecho) finitamente generado tiene cubierta proyectiva.

Demostración. *1* Sean $M_1, ...M_n$ módulos semiperfectos con cubiertas proyectivas $\xi_i : P_i \to M_i$ para cada $1 \leq i \leq n$. Entonces cada P_i es semiperfecto (Proposición 11.1.7 y Proposición 11.1.10). Así $\operatorname{Rad}(P_i) << P_i$ para toda $1 \leq i \leq n$. Esto implica que $\operatorname{Rad}(\bigoplus_{i=1}^n P_i) \cong \bigoplus_{i=1}^n \operatorname{Rad}(P_i) << \bigoplus_{i=1}^n P_i$. Por el Teorema 11.2.10, $\bigoplus_{i=1}^n P_i$ es semiperfecto. Por lo tanto $\bigoplus_{i=1}^n M_i$ es semiperfecto.

2 Como ${}_RR$ es semiperfecto, todo libre izquierdo finitamente generado es semiperfecto por el inciso anterior. Todo módulo finitamente generado es cociente de un libre finitamente generado por lo que tenemos el resultado. El regreso es claro. ☐

Teorema 11.2.12. *Son equivalentes para P proyectivo:*

(a) *Si $P = A + B$ entonces $A = P$ o $B = P$.*

(b) *P es semiperfecto e inescindible.*

(c) $\operatorname{Rad}(P)$ *es máximo y superfluo en P.*

(d) $\operatorname{Rad}(P)$ *es el mayor submódulo propio de P.*

(e) $\operatorname{End}_R(P)$ *es local.*

Demostración. (a)⇒(b). Claramente P es inescindible. Ahora si $A < P$ entonces por la hipótesis P es suplemento de A. Por lo tanto P es sumplementado. Por la Proposición 11.2.6 P es semiperfecto.

(b)⇒(c). Como P es semiperfecto $\operatorname{Rad}(P) << P$. Por la Proposición 11.2.6 toda descomposición de $P/\operatorname{Rad}(P)$ se levanta a P, pero P es inescindible lo que implica que $P/\operatorname{Rad}(P)$ también. Como $P/\operatorname{Rad}(P)$ es semisimple, $P/\operatorname{Rad}(P)$ consta de un solo sumando simple. Por lo tanto $\operatorname{Rad}(P)$ es máximo.

(c)⇒(d). Sea $U < P$ no contenido en $\operatorname{Rad}(P)$. Como $\operatorname{Rad}(P)$ es máximo entonces $P = \operatorname{Rad}(P) + U$, pero $\operatorname{Rad}(P) << P$ así que $U = P$.

(d)⇒(e). Sea $0 \neq f \in \operatorname{End}_R(P)$ un morfismo sobre. Como P es proyectivo, entonces f se escinde así que $P = \operatorname{Ker} f \oplus A$. Si A y $\operatorname{Ker} f$ son propios en P entonces $P = A \oplus \operatorname{Ker} f \leq \operatorname{Rad}(P)$. Contradicción. Por lo tanto $A = P$ y $\operatorname{Ker} f = 0$. Por lo tanto f es un isomorfismo. Sean $f, g \in \operatorname{End}_R(P)$. Si f y g no son invertibles entonces no son sobres lo que implica que

$$\operatorname{Im}(f+g) \leq \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g \leq \operatorname{Rad}(P) < P.$$

Por lo tanto $f + g$ no es sobre, entonces no es invertible. Por el Teorema 8.1.1 $\operatorname{End}_R(P)$ es local.

(e)⇒(a). Supongamos que $P = A + B$. Sea $\pi : P \to P/B$ la proyección canónica. Consideremos $\pi|_A : A \to P/B$ que es sobre. Como P es proyectivo existe $f : P \to A$ tal que $\pi|_A f = \pi$. Podemos considerar a f como un endomorfismo de P. Sea $p \in P$. Entonces $p = f(p) + (Id - f)(p)$. Por otro lado $\pi(p) = \pi|_A f(p)$ así que $\pi(Id - f)(p) = 0$. Por lo tanto $p - f(p) \in B$, i.e. $\operatorname{Im}(Id - f) \leq B$. Como $\operatorname{End}_R(P)$ es local, f o $Id - f$ tiene inverso, lo que implica que $A = P$ o $B = P$. □

Observación 11.2.13. Sea P proyectivo y semiperfecto. Entonces $P/\operatorname{Rad}(P) = \bigoplus_I S_i$ es semisimple y existe una descomposición $P = \bigoplus_I P_i$ tal que $\pi(P_i) = S_i$ para cada $i \in I$, donde π es la proyección canónica. Como

$$\operatorname{Rad}(P) = \operatorname{Rad}(\bigoplus_I P_i) = \bigoplus_I Rad(P_i)$$

entonces $\operatorname{Rad}(P_i) = \operatorname{Rad}(P) \cap P_i$. Lo que implica que

$$S_i = \pi(P_i) = \frac{P_i + \operatorname{Rad}(P)}{\operatorname{Rad}(P)} \cong \frac{P_i}{P_i \cap \operatorname{Rad}(P)} = P_i/\operatorname{Rad}(P_i).$$

Así que, $\operatorname{Rad}(P_i)$ es máximo en P_i para cada $i \in I$. Además, cada P_i es semiperfecto por lo que $\operatorname{Rad}(P_i) << P_i$. Por lo tanto cada P_i satisface la condición (c) del Teorema 11.2.12. Así, $P = \bigoplus_I P_i$ es una descomposición con $\operatorname{End}_R(P_i)$

local para cada $i \in I$, lo que implica que la descomposición es única en el sentido de K-R-S-A (Teorema 8.3.4). En particular, si R es semiperfecto entonces $R = \bigoplus_{i=1}^{n} Re_i$ con $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una familia de idempotentes ortogonales tales que $1 = \sum_{i=1}^{n} e_i$, Re_i es inescindible y $e_i Re_i \cong \operatorname{End}_R(Re_i)$ local. Además, cada $\operatorname{Rad}(Re_i) = \operatorname{Rad}(R)e_i$ es el mayor submódulo de Re_i.

Definición 11.2.14. Sea A un ideal de un anillo R y sea $\pi : R \to R/A$ la proyección canónica. Decimos que una familia $\{\varepsilon_i\}_I$ de idempotentes en R/A puede ser levantada a R si existe una familia $\{e_i\}_I$ de idempotentes en R tales que $\pi(e_i) = \varepsilon_i$ para cada $i \in I$.

Lema 11.2.15. *Sea R un anillo y $b \in R$. Consideremos $R_0 = \langle 1, b\rangle$ el anillo generado por el 1 y b.*

1. *Para cualesquiera n y m naturales, se tiene que*
   - $R = Rb^n + R(1-b)^m + R(b-b^2)$, *and*
   - $Rb^n \cap R(1-b)^m = Rb^n(1-b)^m$
2. *Si $b - b^2$ es nilpotente, entonces existe un idempotente $e \in R_0$ tal que $r_0 b = e$ y $e - b = s_0(b - b^2)$ con $r_0, s_0 \in R_0$.*

Demostración. 1. Sea $\mathbb{Z}[x]$ el anillo de polinomios en una indeterminada con coeficientes en $\mathbb{Z}$. Consideremos el polinomio $1-x^n-(1-x)^m$. Notemos que 0 y 1 son raíces de este polinomio, así que $x(1-x)$ divide a $1-x^n-(1-x)^m$. Así existe $z_0 \in \mathbb{Z}[x]$ tal que $1 = x^n + (1-x)^m + z_0(x-x^2)$. Hay un epimorfismo de anillos $\mathbb{Z}[x] \to R_0$ que manda x a b. Así que $1 = b^n+(1-b)^m+r_0(b-b^2)$ con $r_0 \in R_0$. Por lo tanto $R_0 = R_0 b^n + R_0(1-b)^m + R_0(b-b^2)$ y $R = Rb^n + R(1-b)^m + R(b-b^2)$. Para la otra afirmación, es claro que $Rb^n(1-b)^m \subseteq Rb^n \cap R(1-b)^m$. Para la otra inclusión tomemos $d = rb^n = s(1-b)^m \in Rb^n \cap R(1-b)^m$. Tenemos que

$$d = s(1-b)^m = s\left(1 - \binom{m}{1} b + \binom{m}{2} b^2 - \cdots\right)$$

$$s - s\left(\binom{m}{k} - \binom{m}{2} b + \cdots\right) b.$$

Así obtenemos $s = d + sr_0 b = rb^n + sr_0 b$ con $r_0 \in R_0$. Podemos sustituir s en el lado derecho de la ecuación y usar el hecho que R_0 es conmutativo para obtener

$$s = rb^n + (rb^n + sr_0 b)r_0 b = r_1 b^n + sr_0^2 b^2,$$

con $r_1 \in R$. Continuando inductivamente de esta manera, eventualmente llegamos a que $s = tb^n$ con $t \in R$. Lo que implica que $d = tb^n(1-b)^m$ que es lo que queríamos demostrar.

2. Supongamos que $(b-b^2)^n = 0$ para algún $n > 0$. Como R_0 es conmutativo, el ideal $R_0(b-b^2)$ es un ideal nilpotente de R_0. Esto implica que $R_0(b-b^2)$ está contenido en $\operatorname{Rad}(R_0)$ y por lo tanto $R_0(b-b^2) << R_0$. Por *1*, $R_0 = R_0 b^n + R_0(1-b)^n + R_0(b-b^2)$, entonces $R_0 = R_0 b^n + R_0(1-b)^n$. Por otro lado, $Rb^n \cap R(1-b)^n = Rb^n(1-b)^n = R(b-b^2)^n = 0$. Por lo tanto $R_0 = R_0 b^n \oplus R_0(1-b)^n$. Se sigue que existe un idempotente $e \in R_0$ tal que $R_0 e = R_0 b^n$ y $R_0(1-e) = R_0(1-b)^n$. Así que $e = r_0 b$ con $r_0 \in R_0$. Usando *1*,

$$e - b = (1-b) - (1-e) \in R_0 b \cap R_0(1-b) = R_0(b-b^2),$$

por lo que $e - b = s_0(b-b^2)$ con $s_0 \in R_0$. □

Teorema 11.2.16. *Sea A un nilideal de R. Entonces toda familia finita o numerable de idempotentes ortogonales de R/A puede ser levantada a R.*

Demostración. Sea $\{\varepsilon_i\}_{\mathbb{N}}$ una familia de idempotentes ortogonales de R/A. Haremos la prueba por inducción sobre el tamaño de la familia. Sea $\varepsilon \in R/A$ un idempotente. Si $\pi : R \to R/A$ es la proyección canónica, existe $b \in R$ tal que $\pi(b) = \varepsilon$. Entonces $\pi(b - b^2) = \pi(b) - \pi(b)^2 = \varepsilon - \varepsilon^2 = 0$. Así que $b - b^2 \in A$, lo que implica que existe $n > 0$ tal que $(b - b^2)^n = 0$. Por el Lemma 11.2.15.*2*, existe un idempotente $e \in R$ con $e - b = s_0(b - b^2) \in A$. Por lo tanto, $0 = \pi(e - b) = \pi(e) - \pi(b) = \pi(e) - \varepsilon$. Así $\pi(e) = \varepsilon$. Para el paso inductivo, consideremos una familia de idempotentes ortogonales $\{\varepsilon_i\}_{\mathbb{N}}$ de R/A. Supongamos que hemos obtenido idempotetentes $e_1, e_2, ..., e_n \in R$ tales que $\pi(e_i) = \varepsilon_i$ con $1 \leq i \leq n$. Sea $c \in R$ tal que $\pi(c) = \varepsilon_{n+1}$ y sea $b = (1 - \sum_{i=1}^{n} e_i)\, c\, (1 - \sum_{i=1}^{n} e_i)$. Como los $e_i's$ son ortogonales, $e_i b = b e_i = 0$ para todo $1 \leq i \leq n$, y además $\pi(b) = (1 - \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i)\, \varepsilon_{n+1}\, (1 - \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i) = \varepsilon_{n+1}$. Por la base de inducción y el Lemma 11.2.15.*2* existe un idempotente $e_{n+1} \in R$ tal que $\pi(e_{n+1}) = \pi(b) = \varepsilon_{n+1}$ y $e_{n+1} = r_0 b = b r_0$. Como $e_i b = b e_i = 0$ para $1 \leq i \leq n$, $e_i e_{n+1} = e_{n+1} e_i = 0$ para $1 \leq i \leq n$. Completando la prueba. □

Definición 11.2.17. Un ideal I de R es *t-nilpotente derecho* (resp., *izquierdo*) si para cada familia $a_1, a_2, \ldots$ de elementos de I existe $k > 0$ tal que $a_1 a_2 \cdots a_k = 0$ (resp., $a_k a_{k-1} \cdots a_1 = 0$).

Observación 11.2.18. Todo ideal t-nilpotente es un nil-ideal

Teorema 11.2.19. *Las siguientes condiciones son equivalentes para un ideal $I \leq R$:*

(a) *I es t-nilpotente derecho.*

(b) *Para todo R-módulo izquierdo M, si $IM = M$ entonces $I = 0$.*

(c) *Para todo R-módulo izquierdo $IM << M$.*

(d) *$IR^{(\mathbb{N})} << R^{(\mathbb{N})}$ como R-módulos izquierdos.*

Demostración. (a)⇒(b) Sea $0 \neq M$ tal que $IM = M$. Entonces existe $0 \neq a_1 m_1$ con $a_1 \in I$ y $m_1 \in M$. Por otro lado $m_1 = \sum a_i' m_i' \in IM = M$, así que $0 \neq a_1 m_1 = \sum a_1 a_i' m_i'$. Esto implica que existen $a_2 \in I$ y $m_2 \in M$ tales que $0 \neq a_1 a_2 m_2$, en particular $a_1 a_2 \neq 0$. Siguiendo este procedimiento obtenemos que para cada $n > 0$ existen $a_1, a_2, \ldots, a_n \in I$ tales que $a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$. Por lo tanto I no es t-nilpotente derecho.

(b)⇒(c) Sea M un módulo y supongamos que $IM + U = M$ para algún submodulo $U \leq M$. Entonces

$$I(M/U) = \frac{IM + U}{U} = M/U.$$

Por hipótesis, $M/U = 0$. Por lo tanto $IM << M$.

(c)⇒(d) Es un caso particular.

(d)⇒(a) Sea $\{x_1, x_2, \ldots\}$ una base de $R^{(\mathbb{N})}$ y sean $a_1, a_2, \dots \in I$. Para cada $i \in \mathbb{N}$ ponemos $u_i = x_i - a_i x_{i+1}$ y $U = \sum_{i \in \mathbb{N}} R u_i$. Como $x_i = u_i + a_i x_{i+1}$, $R^{(\mathbb{N})} = U + IR^{(\mathbb{N})}$. Tenemos que $IR^{(\mathbb{N})} << R^{(\mathbb{N})}$, así que $U = R^{(\mathbb{N})}$. Entonces

$$x_1 = \sum_{i=1}^{k} r_i u_i = \sum_{i=1}^{k} r_i (x_i - a_i x_{i+1}) = \sum_{i=1}^{k} r_i x_i - \sum_{i=1}^{k} r_i a_i x_{i+1}$$

$$= \sum_{j=1}^{k} r_j x_j - \sum_{j=2}^{k+1} r_{j-1} a_{j-1} x_j = r_1 x_1 + \sum_{j=2}^{k} (r_j - r_{j-1} a_{j-1}) x_j + r_k a_k x_{k+1}.$$

Lo que implica que

$$0 = (r_1 - 1)x_1 + \sum_{j=2}^{k} (r_j - r_{j-1} a_{j-1}) x_j + r_k a_k x_{k+1}.$$

Como $\{x_1, x_2, \dots\}$ es una base de $R^{(\mathbb{N})}$, $r_1 = 1$, $r_j - r_{j-1} a_{j-1} = 0$ para $2 \leq j \leq k$ y $r_k a_k = 0$ lo que implica $r_2 = a_1$, $r_3 = a_1 a_2$ y así $r_k = a_1 a_2 \cdots a_{k-1}$ y como $r_k a_k = 0$ entonces $a_1 a_2 \cdots a_k = 0$. Por lo tanto I es t-nilpotente derecho. $\square$

Corolario 11.2.20. *Son equivalentes para un anillo R:*

(a) $\mathrm{Rad}(R)$ *es t-nilpotente derecho.*

(b) *Todo R-módulo izquierdo proyectivo tiene radical superfluo.*

(c) *El R-módulo izquierdo $R^{(\mathbb{N})}$ tiene radical superfluo.*

Demostración. (a)⇒(b) Sea P un módulo proyectivo. Por la Proposición 9.2.7.*7*, $\mathrm{Rad}(P) = \mathrm{Rad}(R)P$, así que por el Teorema 11.2.19 $\mathrm{Rad}(P) << P$.

(b)⇒(c) Es claro.

(c)⇒(a) Como $\mathrm{Rad}(R^{(\mathbb{N})}) = \mathrm{Rad}(R)R^{(\mathbb{N})}$ porque $R^{(\mathbb{N})}$ es proyectivo, entonces por el inciso (d) del Teorema 11.2.19 tenemos que $\mathrm{Rad}(R)$ es t-nilpotente derecho. $\square$

Teorema 11.2.21. *Son equivalentes para un ideal I de R:*

(a) *I es t-nilpotente derecho.*

(b) $\mathbf{l}_M(I) := \{m \in M \mid ma = 0\ \forall a \in I\} = 0$ *implica que $M = 0$ para todo R-modulo derecho M.*

(c) $\mathbf{l}_M(I) \leq_e M$ *para todo R-módulo derecho M.*

Demostración. (a)⇒(b) Supongamos que $M_R \neq 0$ y $\mathbf{l}_M(I) = 0$. Sea $0 \neq m \in M$. Entonces existe $a_1 \in I$ tal que $ma_1 \neq 0$. Así, existe $a_2 \in I$ tal que $ma_1 a_2 \neq 0$. Por lo tanto para cada $n > 0$ existen $a_1, a_2, \dots, a_n \in I$ tales que $ma_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$, en particular, $a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$. Lo que implica que I no es t-nilpotente derecho.

(b)⇒(c) Sea $N \leq M_R$ tal que $\mathbf{l}_M(I) \cap N = 0$. Entonces $\mathbf{l}_N(I) = 0$. Por hipótesis, $N = 0$. Por lo tanto $\mathbf{l}_M(I) \leq_e M$.

(c)⇒(a) Demostraremos que $IM \neq M$ para todo R-módulo izquierdo ${}_RM$. Sea $0 \neq {}_RM$. Denotemos $U = \mathbf{l}_R(M) = \{r \in R \mid rm = 0\ \forall m \in M\}$ que es un ideal bilateral de R. Sea $H = (U : I) = \{x \in R \mid xI \subseteq U\}$. Notemos que $U \leq H$ y $H/U = \mathbf{l}_{R/U}(I)$. Por hipótesis, $H/U \leq_e R/U$. Así que $H/U \neq 0$ lo que implica que $U < H$. Sea $h \in H$ tal que $h \notin U$. Entonces hay un $m \in M$ tal que $hm \neq 0$. Por lo tanto $HM \neq 0$. Pero $HIM \leq UM = 0$ porque $HI \subseteq U$, así que $IM \neq M$. $\square$

11.3. Anillos Perfectos

Definición 11.3.1. Un anillo R se llama *prefecto izquierdo* si todo R-módulo izquierdo tiene cubierta proyectiva. Un *anillo perfecto derecho* se define de manera analoga.

Proposición 11.3.2. *Son equivalentes para un anillo R:*

(a) *R es perfecto izquierdo.*

(b) *$R^{(\mathbb{N})}$ es simiperfecto como R-módulo izquierdo.*

(c) *R es simiperfecto y todo R-módulo izquierdo libre tiene radical superfluo.*

Demostración. (a)$\Rightarrow$(b) Es claro.

(b)$\Rightarrow$(c) Por la Proposición 11.2.6, $\mathrm{Rad}(R^{(\mathbb{N})}) << R^{(\mathbb{N})}$. Esto implica que todo módulo izquierdo proyectivo tiene radical superfluo por el Corolario 11.2.20, en particular todo libre. Ahora, como R es un sumando directo de $R^{(\mathbb{N})}$ entonces R es semiperfecto (Lema 11.1.4).

(c)$\Rightarrow$(a) Como R es semiperfecto y todo R-módulo izquierdo libre tiene radical superfluo, por la Porposición 11.2.6 todo R-módulo izquierdo libre es semiperfecto. Esto implica que todo cociente de un libre tiene cubierta proyectiva. Como todo R-módulo es un cociente de un libre se tiene que R es perfecto izquierdo. □

Corolario 11.3.3. *Todo anillo Artiniano izquierdo (resp. derecho) es perfecto izquierdo (resp. derecho).*

Demostración. Por el Corolario 11.1.8, ${}_RR$ es semiperfecto. Por otro lado, todo R-módulo izquierdo tiene radical superfluo (Corolario 9.2.25). Se sigue de la Proposición 11.3.2 que R es perfecto izquierdo. □

Teorema 11.3.4. *Son equivalentes para un anillo R:*

(a) *R es perfecto izquierdo.*

(b) *Todo R-módulo izquierdo plano es proyectivo.*

(c) *R satisface la condición de cadena descendente en ideales principales derechos.*

(d) *Todo R-módulo derecho no cero tiene Zoclo no cero y R no contiene un conjunto infinito de idempotentes ortogonales.*

(e) $\mathrm{Rad}(R)$ *es t-nilpotente derecho y* $R/\mathrm{Rad}(R)$ *es semisimple.*

Demostración. (a)$\Rightarrow$(b) Sea ${}_RM$ un módulo plano. Por hipótesis M tiene cubierta proyectiva, digamos $\alpha : P \to M$. Como $\mathrm{Ker}\,\alpha << P$, se tiene que $\mathrm{Ker}\,\alpha \leq \mathrm{Rad}(P)$. Por otro lado, $M \cong P/\mathrm{Ker}\,\alpha$. Se sigue del Teorema 10.4.4, que $\mathrm{Ker}\,\alpha = 0$ y por lo tanto $M \cong P$.

(b)$\Rightarrow$(c) Sea $a_1R \geq a_2R \geq \cdots$ un cadena descendente de ideales principales derechos de R. Entonces $a_{i+1} = a_ib_i$ para algún $b_i \in R$. Así, $a_1 = b_1$ y $a_i = b_1 \cdots b_i$ para toda $i > 0$. Afirmamos que existe un ideal derecho A de R y un $m > 0$ tal que $b_1b_2 \cdots b_nR = A$ para todo $n \geq m$. Consideremos el R-módulo libre izquierdo $R^{(\mathbb{N})}$ con base canónica $\{e_i\}$ y sea $B = \sum_{i>0} R(e_i - b_ie_{i+1})$. Sea L

un ideal derecho de R. Es claro que $LB \subseteq B \cap LR^{(\mathbb{N})}$. Ahora, sea $d \in B \cap LR^{(\mathbb{N})}$. Entonces $d = \sum_{i=1}^{n} r_i(e_i - b_i e_{i+1}) = \sum_{j=1}^{h} l_j f_j$ con $l_j \in L$ y $f_j \in R^{(\mathbb{N})}$. Para cada $1 \leq j \leq h$, $f_j = \sum t_{k_j} e_{k_j}$. Esto implica que $d = \sum l_j f_j = \sum l_j (\sum t_{k_j} e_{k_j}) = \sum l_j t_{k_j} e_{k_j}$. Notemos que $l_j t_{k_j} \in L$, así que reescribiendo la expresión de d tenemos que $d = \sum_{i=1}^{n+1} \ell_i e_i$ con $\ell_i \in L$. Por otro lado,

$$d = \sum r_i(e_i + b_i e_{i+1}) = r_1 e_1 + (r_2 - r_1 b_1) e_2 + \cdots + (r_n - r_{n-1} b_{n-1}) e_n - r_n b_n e_{n+1}.$$

Igualando coeficientes, $\ell_1 = r_1$, $\ell_i = r_i - r_{i-1} b_{i-1}$ para $2 \leq i \leq n$ y $\ell_{n+1} = -r_n b_n$. Por lo tanto cada $r_i \in L$, lo que implica que $d \in LB$. Por lo tanto, $LB = B \cap LR^{(\mathbb{N})}$. Se sigue del Teorema 10.4.3 que $R^{(\mathbb{N})}/B$ es plano. Por hipótesis $R^{(\mathbb{N})}/B$ tiene que ser proyectivo lo que implica que B es un sumando directo de $R^{(\mathbb{N})}$, digamos $R^{(\mathbb{N})} = B \oplus U$. Sea $\rho : R^{(\mathbb{N})} \to R^{(\mathbb{N})}$ el morfismo dado por la proyección canónica en U. Entonces ρ es idempotente y $\rho(e_k - b_k e_{k+1}) = 0$ para todo $k > 0$. Entonces $\rho(e_k) = b_k \rho(e_{k+1})$ para todo $k > 0$. Denotemos $z_k = \rho(e_k)$. Entonces $\rho(z_k) = z_k$ y para todo $n \geq k$ se tiene que $z_k = b_k b_{k+1} \cdots b_n z_{n+1}$. Así tenemos que $\{r \in R \mid r b_k b_{k+1} \cdots b_n = 0 \text{ para algún } n \geq k\} \subseteq (0 : z_k)$. Ahora, sea $0 \neq r \in R$ tal que $r z_k = 0$. Tenemos que $e_k = b + z_k$ con $b \in B$. Entonces $r e_k = r b = \sum_{i=1}^{n} r_i(e_i + b_i e_{i+1})$ con $n \geq k$. Igualando coeficientes, $r_1 = \cdots = r_{k-1} = 0$, $r_k = r$, $r_{k+1} = r_k b_k$, ... , $r_n = r_{n-1} b_{n-1}$, $r_n b_n = 0$. Sustituyendo, $0 = r_n b_n = r_{n-1} b_{n-1} b_n = \cdots = r b_k \cdots b_n$. Por lo tanto $(0 : z_k) = \{r \in R \mid r b_k b_{k+1} \cdots b_n = 0 \text{ para algún } n \geq k\}$.

Escribamos $z_k = (s_{k_i}) \in R^{(\mathbb{N})}$. Consideremos $z_1 = (s_{1_i}) \in R^{(\mathbb{N})}$ y sea A el ideal derecho generado por $\{s_{1_i}\}$. Notemos que A es finitamente generado. Tenemos que para cada $m > 0$, $z_1 = b_1 b_2 \cdots b_m z_{m+1}$. Esto implica que $s_{1_i} = b_1 b_2 \cdots b_m s_{m+1_i}$. Por lo tanto $A \leq b_1 b_2 \cdots b_m R$ para cada $m > 0$. Ahora, como $z_1 = \sum s_{1_i} e_i$ y $\rho(z_1) = z_1$ entonces

$$z_1 = \rho(z_1) = \left(\sum_i s_{1_i} e_1 \right) = \sum_i s_{1_i} \rho(e_i) = \sum_i s_{1_i} z_i = \sum_i s_{1_i} \left(\sum_j s_{i_j} e_j \right)$$
$$= \sum_i \sum_j s_{1_i} s_{i_j} e_j.$$

Igualando coeficientes tenemos que $s_{1_i} = \sum_j s_{1_j} s_{j_i}$ para todo $i > 0$. Como para $n \geq j$, $z_j = b_j b_{j+1} \cdots b_n z_{n+1}$, entonces $s_{j_i} = b_j b_{j+1} \cdots b_n s_{n+1_i}$. Sustituyendo,

$$b_1 b_2 \cdots b_n s_{n+1_i} = s_{1_i} = \sum_j s_{1_j} s_{j_i} = \sum_j s_{1_j} b_j b_{j+1} \cdots b_n s_{n+1_i}$$

y entonces

$$\left(b_1 b_2 \cdots b_n - \sum_j s_{1_j} b_j b_{j+1} \cdots b_n \right) s_{n+1_i} = 0$$

para toda $i > 0$. Por lo tanto $\left(b_1 b_2 \cdots b_n - \sum_j s_{1_j} b_j b_{j+1} \cdots b_n \right) \in (0 : z_{n+1})$. Por la descripción que dimos arriba de $(0 : z_{n+1})$, existe un $m \geq n+1$ tal que $\left(b_1 b_2 \cdots b_n - \sum_j s_{1_j} b_j b_{j+1} \cdots b_n \right) b_{n+1} \cdots b_m = 0$. Así,

$$b_1 b_2 \cdots b_n b_{n+1} \cdots b_m = \sum_j s_{1_j} b_j b_{j+1} \cdots b_n b_{n+1} \cdots b_m \in A.$$

Por lo tanto $b_1b_2\cdots b_\ell R \leq A$ para todo $\ell \geq m$. Por lo tanto $b_1b_2\cdots b_\ell R = a_\ell R = A$ para todo $\ell \geq m$. Esto prueba nuestra afirmación y por lo tanto la cadena $a_1R \geq a_2R \geq \cdots$ se estaciona.

(c)$\Rightarrow$(d) Sea M un R-módulo derecho no cero y $0 \neq m \in M$. Si mR no contiene un simple, cada submodulo propio no cero de mR contiene un submodulo propio no cero. Con esto podemos construir una cadena descendente

$$mR > mr_1R > mr_1r_2R > \cdots$$

Entonces tenemos una cadena descendente de ideales principales derechos de R

$$R > r_1R > r_1r_2R > \cdots$$

Notemos lo siguiente: si $e, f \in R$ son idempotentes ortogonales, entonces $e+f$ es idempotente. Además, $(1-e-f)R \subseteq (1-e)R$ ya que $1-e-f = (1-e)(1-e-f)$. Supongamos que $\{e_i\}$ es una familia infinita de idempotentes ortogonales no cero de R. Entonces existe una cadena descendente de ideales principales derechos de R

$$(1-e_1)R \geq (1-e_1-e_2)R \geq (1-e_1-e_2-e_3)R \geq \cdots$$

Por hipótesis, existe $n > 0$ tal que $(1-e_1-\cdots-e_n)R = (1-e_1-\cdots-e_{n+1})R$. Esto implica que existe $r \in R$ tal que $(1-e_1-\cdots-e_n) = (1-e_1-\cdots-e_{n+1})r$. Multiplicando por e_{n+1}, tenemos que $e_{n+1} = 0$, lo que es una contradiccion.

(d)$\Rightarrow$(e) Sea M un R-módulo derecho. Como para todo módulo derecho N se tiene que $N\operatorname{Rad}(R) \leq \operatorname{Rad}(N)$, en particular, $\operatorname{Zoc}(M)\operatorname{Rad}(R) \leq \operatorname{Rad}(\operatorname{Zoc}(M))$. Como el radical de un semisimple es cero, entoneces $\operatorname{Zoc}(M) \subseteq \mathbf{l}_M(\operatorname{Rad}(R))$. Por hipótesis, $\operatorname{Zoc}(M) \leq_e M$, así que $\mathbf{l}_M(\operatorname{Rad}(R)) \leq_e M$. Por el Teorema 11.2.21, $\operatorname{Rad}(R)$ es t-nilpotente derecho.

Como $\operatorname{Rad}(R)$ es t-nilpotente derecho, entonces $\operatorname{Rad}(R)$ es un nil-ideal. Se sigue del Teorema 11.2.16 que toda familia finita o numerable de idempotentes de $R/\operatorname{Rad}(R)$ puede ser levantada a R. Por hipótesis, $R/\operatorname{Rad}(R)$ no contiene una familia infinita de idempotentes ortogonales. Pongamos $T = R/\operatorname{Rad}(R)$. Por hipótesis, T contiene un simple S_1. Como $\operatorname{Rad}(T) = 0$, S_1 no puede ser superfluo, así que existe un submódulo derecho de T tal que $S_1 + U_1 = T$. Notemos que $S_1 \cap U_1 = 0$ por lo que $T = S_1 \oplus U_1$. Si $U_1 \neq 0$, existe un simple $S_2 \leq U_1$. Como $\operatorname{Rad}(T) = 0$, $\operatorname{Rad}(U) = 0$. Así que $U_1 = S_2 \oplus U_2$ para algún $U_2 \leq U_1$. Entonces $T = S_1 \oplus S_2 \oplus U_2$. Así, para cada $n > 0$, podemos dar una descomposción $R = S_1 \oplus S_2 \oplus \cdots \oplus S_n \oplus U_n$ con S_i simple para $1 \leq i \leq n$ y $U_{n-1} = S_n \oplus U_n$. Se sigue de la Proposición 8.1.6, que tenemos una sucesión de idempotentes ortogonales $\{e_1, ..., e_n, u_n\}$. Por hipótesis, esta sucesión debe ser finita, lo que implica que existe una $m > 0$ para la cual $T = \bigoplus_{i=1}^m S_i$. Por lo tanto T es semisimple.

(e)$\Rightarrow$(a) Como $\operatorname{Rad}(R)$ es t-nilpotente derecho, es un nil-ideal. Por el Teorema 11.2.16, todo idempotente se levanta a R. Por lo tanto R es semiperfecto por la Proposición 11.2.7 ya que $R/\operatorname{Rad}(R)$ es semisimple. Ahora, por el Corolario 11.2.20 todo R-módulo izquierdo libre tiene radical superfluo. Se sigue del Teorema 11.2.10 que todo módulo izquierdo libre es semiperfecto. Por lo tanto todo R-módulo izquierdo tiene cubierta proyectiva, es decir, R es perfecto izquierdo. $\square$

El siguiente ejemplo muestra que la condición de no tener un conjunto infinito de idempotentes ortogonales no se puede quitar de la condición *4* del Teorema 11.3.4.

Ejemplo 11.3.5. Considere el anillo $R = \mathbb{Z}_2^{\aleph_0}$, es decir, el anillo de sucesiones numerables en 0 y 1. Entonces R es un anillo conmutativo y $\operatorname{Zoc}(R) = \mathbb{Z}_2^{(\aleph_0)} \leq_e R$ (sucesiones de soporte finito). Esto implica que todo R-módulo tiene zoclo esencial. Notemos que R contiene un conjunto infinito $\{e_1, e_2, ...\}$ de idempotentes ortogonales, donde e_i es la sucesión con 0 en todas las entradas, excepto en la i-ésima. Podemos ver que $\operatorname{Rad}(R) = 0$ y entonces R no es perfecto porque $R/\operatorname{Rad}(R) = R$ no es semisimple.

Corolario 11.3.6. *Sea R un anillo perfecto izquierdo.*

1. *Todo R-módulo derecho Noetheriano es Artiniano.*
2. *Todo R-módulo izquierdo Artiniano es Noetheriano.*
3. *Si R es Noetheriano izquierdo, entonces R es Artiniano izquierdo.*

Demostración. 1 Sea $U \leq M_R$. Entonces $\operatorname{Zoc}(M/U)$ es finitamente generado que es lo equivalente a ser finitamente cogenerado para un semisimple. Además, por el Teorema 11.3.4, $\operatorname{Zoc}(M/U) \leq_e M/U$. Por lo tanto M_R es Artiniano por el Corolario 9.2.33.

2 Sea $U \leq {}_RM$. Como ${}_RR$ es perfecto, todo R-módulo es semiperfecto. Así que $\operatorname{Rad}(U) << U$ y $U/\operatorname{Rad}(U)$ es semisimple. Como U es Artiniano, $U/\operatorname{Rad}(U)$ es Artiniano. Esto implica que $U/\operatorname{Rad}(U)$ es f.g. Por el Lema 9.2.4, U es f.g. Por lo tanto ${}_RM$ es Noetheriano.

3 Como ${}_RR$ es perfecto, por el Teorema 11.3.4, $\operatorname{Rad}(R)$ es t-nilpotente derecho. Como además, ${}_RR$ es Noetheriano, $\operatorname{Rad}(R)$ es nilpotente por la Proposición9.2.22. Por lo tanto R es semiprimario y el resultado se sigue del Corolario 9.2.29. □

Proposición 11.3.7. *Son equivalentes para un anillo R:*

(a) *R es perfecto izquierdo;*

(b) $R/\operatorname{Rad}(R)$ *es semisimple y todo R-módulo izquierdo no cero tiene máximos.*

Demostración. (a)⇒(b) Como R es perfecto izquierdo, $R/\operatorname{Rad}(R)$ es semisimple. Sea $0 \neq {}_RM$. Entonces existe $\xi : P \to M$ una cubierta proyectiva. Así que $\operatorname{Ker}\xi << P$. Sabemos que $\operatorname{Rad}(P) \neq P$ por el Teorema 9.2.39. Como $M \cong P/\operatorname{Ker}\xi$ con $\operatorname{Ker}\xi \leq \operatorname{Rad}(P)$, entonces M tiene máximos.

(b)⇒(a) Tenemos que para todo módulo ${}_RM$, $\operatorname{Rad}(R)M \leq \operatorname{Rad}(M)$. Por hipótesis, todo módulo no cero tiene máximos, así que $\operatorname{Rad}(M) \neq M$. Se sigue por el Teorema 11.2.19 que $\operatorname{Rad}(R)$ es t-nilpotente. Por el Teorema 11.3.4, R es perfecto izquierdo. □

Corolario 11.3.8. *Son equivalentes para un anillo R:*

(a) *R es perfecto izquierdo;*

(b) *Todo R-módulo derecho satisface c.c.d. en submódulos f.g.*

Demostración. (a)⇒(b) Sea M un R-módulo derecho y sea $m_1R \geq m_2R \geq \cdots$ una cadena descendente de submódulos cíclicos de M. Entonces, existe $r_1 \in R$ tal que $m_2 = m_1r_1$, y existe $r_2 \in R$ tal que $m_3 = m_2r_2 = m_1r_1r_2$,..., es decir, $m_i = m_1r_1 \cdots r_{i-1}$ para todo $i > 0$. Por otro lado tenemos la cadena $r_1R \geq r_2R \geq \cdots$ de ideales derechos de R. Como R es perfecto izquierdo, esta sucesión se estaciona, es decir, existe $n > 0$ tal que $r_1 \cdots r_nR = r_1 \cdots r_{n+j}R$ para todo $j > 0$. Esto implica que $m_{n+1} = m_1r_1 \cdots r_n = m_1r_1 \cdots r_{n+1}s = m_{n+2}s$ para algún $s \in R$, por lo que $m_{n+1}R = m_{n+2}R$. Así tenemos que la cadena $m_1R \geq m_2R \geq \cdots$ se estaciona. El resultado se sigue del Lema 2.1.30.

(b)⇒(a) Se sigue del Teorema 11.3.4. □

Corolario 11.3.9. *Si R es perfecto izquierdo (resp. der) e I es un ideal bilateral de R, entonces R/I es perfecto izquierdo (resp. derecho).*

Demostración. Todo R/I-módulo derecho es un R-módulo derecho. Así que toda cadena descendente de submódulos cíclicos derechos de un R/I-módulo se estaciona porque R es perfecto izquierdo. Por lo tanto R/I es perfecto izquierdo. □

Índice alfabético