α raiz de $f(x)$ de multiplicidad $m \geq 2$. Por demostrar que $0 = f(\alpha) = f'(\alpha) = f''(\alpha) = \cdots = f^{m-1}$

y $f^{m}(\alpha) \neq 0$. Como α es raiz de $f(x)$ ent $f(\alpha)=0$ y como es raiz multiple $f'(\alpha)=0$ por el ejercicio anterior. Como α es de multiplicidad $m \geq 2$, $(x-\alpha)^m \mid f(x)$ pero $(x-\alpha)^{m+1} \nmid f(x)$

Entonces $f(x) = (x-\alpha)^m g_1(x)$ y así $f'(x) = m(x-\alpha)^{m-1} g_1(x) + (x-\alpha)^m g_1'(x) = (x-\alpha)^{m-1} g_2(x)$ con $g_2(x) = m g_1(x) + (x-\alpha) g_1'(x)$. Así $f^{m-1}(x) = (x-\alpha) g_m(x)$ p.a. $g_m(x) \in K[x]$. De aquí es claro que $f^{m-1}(\alpha) = \cdots = f''(\alpha) = f'(\alpha) = f(\alpha) = 0$.

$f^{m}(x) = g_m(x) + (x-\alpha) g_m'(x)$. Si $f^{m}(\alpha) = 0$, entonces $g_m(\alpha) + 0 = 0$ ie, $g_m(\alpha) = 0$

Así que $(x-\alpha) \mid g_m(x)$ ie, $g_m(x) = (x-\alpha) h(x)$ p.a. $h(x) \in K[x]$. Ahora,

$g_m = 2 g_{m-1}(x) + (x-\alpha) g_{m-1}'(x)$. Así que $(x-\alpha) h(x) = 2 g_{m-1}(x) + (x-\alpha) g_{m-1}'(x)$ y por lo tanto

$g_{m-1}(x) = (x-\alpha)\left(\frac{h(x) - g_{m-1}'(x)}{2}\right) = (x-\alpha) h_2(x)$ con $h_2(x) = \frac{h(x) - g_{m-1}'(x)}{2}$. Entonces tenemos que

$f^{m-2}(x) = (x-\alpha)^2 g_{m-1}(x) = (x-\alpha)^3 h_2(x)$. Haciendo lo mismo para $g_{m-1}(x) = (x-\alpha) h_2(x)$, vean

que $(x-\alpha)^{m+1} \mid f(x)$ lo que es una contradiccion. ∇

Para el regreso solo hay que usar el ejercicio anterior.