Lema: Sea $F \subseteq D$ con F campo y D dominio entero. Si $[D:F] < \infty$, entonces D es campo.

Dem:

Sea $0 \neq \alpha \in D$. Definimos $\theta : D \to D$ como $\theta(r) = \alpha r$. La función θ es un F-morfismo ie $\theta(ns+t) = \alpha(ns+t)$
$= \alpha n s + \alpha t = n(\alpha s) + \alpha t = n\theta(s) + \theta(t)$
$\forall s, t \in D$ y $n \in F$.

$$\dim_F(D) = \dim_F(\operatorname{Ker}\theta) + \dim_F(\operatorname{Im}\theta)$$

$$\operatorname{Ker}\theta = \{r \in D \mid \theta(r) = 0\} = \{r \in D \mid \alpha r = 0\} = 0$$

ya que D es un dominio entero.

Por lo tanto $\dim_F(D) = \dim_F(\operatorname{Im}\theta)$ es decir, θ es supráyectiva. Por lo tanto para $1 \in D$, existe un <u>unico</u> elemento $r \in D$ y $\theta(r) = 1$ i.e. $\alpha r = 1$

$\therefore D$ es campo.

Sea $F \subseteq E$ una extension de campos y $\alpha \in E$. Definimos

$$ev_\alpha(F[x]) = F[\alpha] = \{f(\alpha) \mid f \in F[x]\}$$ y $F(\alpha)$ su campo de fracciones

Notemos que $F[\alpha]$ es dominio entero ya que

$$F \subseteq F[\alpha] \subseteq E$$

Lema: Sea $F \subseteq E$ una extension de campos y $\alpha \in E$.

(a) Si α es trascendete sobre F, entonces $F[\alpha] \cong F[x]$.

(b) Si α es algebraico sobre F, entonces $[F[\alpha] : F] \leq gr(f)$, donde $f \in F[x]$ es cualquier polinomio no cero tal que $f(\alpha) = 0$.

Dem:

(a) Tenemos el morfismo $\varepsilon : F[x] \to F[\alpha]$

$\varepsilon(f(x)) = f(\alpha)$. Por definición de $F[\alpha]$

$\mathcal{E}$ es suprayectivo. Como α es trascendente no existe $0 \neq f(x) \in F[x]$ tal que $\mathcal{E}(f(x)) = 0$ es decir, $\mathcal{E}$ es inyectivo. $\therefore F[x] \cong F[\alpha]$.

(b) Sea $f(x) \in F[x]$ con $gr(f(x)) = n$ tal que $f(\alpha) = 0$. Afirmamos que $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1} \in F[\alpha]$ generan a $F[\alpha]$ como F-espacio vectorial.

Sea $g(\alpha) \in F[\alpha]$ donde $g(x) \in F[x]$. Dividimos $g(x)$ entre $f(x)$. Así existen polinomios $q(x), r(x) \in F[x]$ tales que $g(x) = f(x)q(x) + r(x)$

$r(x) = 0$ ó $gr(r) < n$.

Esto implica que $g(\alpha) = \cancel{f(\alpha)}^{0} q(\alpha) + r(\alpha) = r(\alpha)$

como $gr(r) < n$, $g(\alpha)$ esta generado por

$1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}$. Por lo tanto $[F[\alpha] : F] \leq n$

Teorema: Sea $F \subseteq E$ una extension de campos y $\alpha \in E$. Son equivalentes:

(i) α es algebraico sobre F.

(ii) $[F[\alpha] : F] < \infty$. $\quad F^{F[\alpha]}$

(iii) $F[\alpha]$ es un campo. $\quad F \hookrightarrow \underline{F[\alpha]}$

(iv) $F[\alpha] = F(\alpha)$.

Dem:

Como $F[\alpha] \subseteq F(\alpha)$ y $F(\alpha)$ es el menor campo que contiene a α, entonces (iii)$\Leftrightarrow$(iv).

(i)$\Rightarrow$(ii) es por el lema anterior. y (ii)$\Rightarrow$(ii) se sigue del primer lema. Para (iii)$\Rightarrow$(i), si α no es algebraico ent α es trascendente y $F[\alpha] \cong F[x]$ que no es campo.

Cor. Sea $F \subseteq E$ una extension tal que $\underline{[E : F]} < \infty$. Entonces todo elemento de $\underline{E}$ es algebraico sobre F.

Dem: Sea $\alpha \in E$. Entonces $F \subseteq F[\alpha] \subseteq E$. Así que ${}_F F[\alpha]$ es un F-subespacio de ${}_F E$. Por lo tanto $[F[\alpha]:F] \leq [E:F] < \infty$. Por el teorema anterior, α es algebraico sobre F.

Def: Decimos que una extensión de campos $F \subseteq E$ es de grado finito (a veces extensió finita) si $[E:F] < \infty$.

Una extension de campos $F \subseteq E$ es algebraica si todo elemento de E es algebraico sobre F.

Notemos que toda extension de grado finito es algebraica. Sin embargo el regreso no es cierto. Para dar el contraejemplo necesitamos más resultados.

Lema: Sean $F \subseteq E \subseteq L$ campos. Entonces $[L:F]$ es finito si y solo si tanto $[E:F]$ y $[L:E]$ son finitos. En este caso $[L:F]=[L:E][E:F]$.

Dem:

$$\begin{array}{c} L \\ | \\ E \\ | \\ F \end{array}$$

Sup. que $[L:F]<\infty$. Entonces como ${}_FE$ es un subespacio de ${}_FL$, entonces $[E:F]<\infty$. Notemos que cualquier conjunto que genere a L sobre F tambien genera a L sobre E. Por lo tanto $[L:E]<\infty$

Ahora supongamos que $[L:E]=m$ y $[E:F]=n$. Escogemos bases $l_1, l_2, \dots, l_m$ de ${}_EL$ y $e_1, e_2, \dots, e_n$ de ${}_FE$. Veamos que l_ie_j son distintos y forman una base de ${}_FL$.

Supongamos que $0=\sum a_{ij} l_i e_j$ con $a_i \in F$. Ent

$$0=\sum_i \left(\sum_j a_{ij} e_j\right) l_i \quad \text{con} \quad \sum_j a_{ij} e_j \in E$$

como l_i son base de ${}_E L$ se tiene que $0 = \sum_j a_{ij} e_j$ para cada $1 \leq i \leq m$. Como los e_j son base de ${}_F E$ se tiene que $a_{ij} = 0 \; \forall i, j$.

Sea $l \in L$. Entonces $l = \sum b_i l_i$ con $b_i \in E$ y cada $b_i = \sum_j a_{ij} e_j$ con $a_i \in F$ $\therefore$ $l = \sum_i \sum_j a_{ij} (e_j l_i)$

Teorema. Sea $F \subseteq E$ una extension de campos. Entonces

$$F \subseteq A = \{\alpha \in E / \alpha \text{ es algebraico sobre } F\} \subseteq E$$

es un subcampo de E que contiene a F.

Dem:

Claramente, $F \subseteq A$. Sean $\alpha, \beta \in A$. Tenemos que $F[\alpha]$ es un campo porque α es algebraico y además $F \subseteq F[\alpha] \subseteq A \subseteq E$

Notemos que β es algebraico sobre $F[\alpha]$.
Lo que implica que $[F[\alpha][\beta], F[\alpha]] < \infty$.
Por el lema anterior tenemos:

$$[F[\alpha][\beta], F] = [F[\alpha][\beta], F[\alpha]][F[\alpha] : F] < \infty$$

Por lo tanto todo elemento de $F[\alpha][\beta]$ es algebraico sobre F. En particular $\underline{\alpha - \beta}$ y $\underline{\alpha^{-1}}$ <u>son algebraicos</u> sobre F. $\therefore A$ es un campo.

Tenemos que $\sqrt[3]{2}$ y $\sqrt{3}$ son algebraicos sobre $\mathbb{Q}$. Por el teorema anterior $\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$ también es algebraico sobre $\mathbb{Q}$ pero no es obvio como encontrar un polinomio $f \in \mathbb{Q}[x]$ tal que $f(\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}) = 0$. $f(x) = x^3 - 2$ $g(x) = x^2 - 3$

En el teorema anterior tenemos la extension

$$\boxed{F[\alpha][\beta]} = \{ g(\beta) \mid g(x) \in F[\alpha][x] \}$$

$$g(x) = \sum b_i x^i \text{ con } b_i \in F[\alpha]$$

$$b_i = f_{ij}(\alpha) \text{ con } f_{ij}(y) \in F[y]$$

$$g(x) = \sum f_{ij}(\alpha) x^i$$

$$g(\beta) = \sum f_{ij}(\alpha) \beta^i \text{ con } g(x,y) \in F[x,y]$$

$$F[\alpha][\beta] = F[\alpha,\beta] = \{ g(\alpha,\beta) \mid g(x,y) \in F[x,y] \}$$

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{C} \arrow[d, no head] & \\
 & \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i) \arrow[dl, no head] \arrow[dr, no head] & \\
\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \arrow[dr, no head] & & \mathbb{Q}(i) \arrow[dl, no head] \\
 & \mathbb{Q} &
\end{tikzcd}
$$