Algebra Moderna II
Tarea 1

Prof. Mauricio Medina

Todos los anillos considerados serán *anillos conmutativos con unidad.*

1. Sea $\{R_i\}$ una familia de anillos. Demuestre que el producto cartesiano $\prod_{i \in I} R_i$ es un anillo.

2. Sean I y J ideales del anillo del anillo R.

   a) Suponga que $I \subseteq J$. Demuestre que $J/I := \{a + I \mid a \in J\}$ es un ideal del anillo cociente R/I.

   b) Sea $f : T \to R$ un morfismo de anillos. Demuestre que $f^{-1}(I)$ es un ideal de T.

3. Sean I y J ideales de un anillo R. Demuestre que:

   a) Demuestre que $IJ \subseteq I \cap J$.

   b) $(J : I) = \{r \in R \mid ra \in J \text{ para todo } a \in I\}$.
   Al ideal $(J : I)$ se le llama el trasladado o el que traslada I a J.
   En el caso particular $(0 : I)$ se le llama el anulador de I.

4. Sea I un ideal de un anillo R. Se define

   $$\sqrt{I} = \{r \in R \mid \exists n > 0 \ r^n \in I\}.$$

   Demuestre que $\sqrt{I}$ es un ideal de R que contiene a I. A $\sqrt{I}$ se le llama el *ideal radical de* I.

   Definición: Un elemento r de un anillo R se llama *nilpotente* si existe un $n > 0$ tal que $r^n = 0$.

5. Sea $r \in R$ un elemento nilpotente. Demuestre que $1 - r$ es una unidad de R.

6. Demuestre que $\sqrt{0}$ consiste de todos los elementos nilpotentes de R.

   Definición: Un subconjunto $S \subseteq R$ se dice que es *multiplicativo* si $0 \notin S$ y si $a, b \in S$ entonces $ab \in S$.

7. Demuestre que en anillo R, un subconjunto S es multiplicativo si y solo si su complemento es un ideal primo.

8. Sea I un ideal de R. Demuestre que $\sqrt{I} = \bigcap \{P \leq R \mid I \subseteq P \text{ and } P \text{ es primo.}\}$

9. Sea $p \in R$ un elemento primo. Demuestre que Rp es un ideal primo.

10. Sea R un anillo. Demuestre que R tiene ideales máximos y que todo ideal propio está contenido un ideal máximo.

11. Sea R un anillo finito. Demuestre que todo ideal primo de R es máximo.

    Definición: Un anillo R se llama *local* si contiene un único ideal máximo.

12. Sean $a, b \in R$ con R un anillo local. Si $a|b$ y $b|a$, entonces existe una unidad $u \in R$ tal que $au = b$.

    Definición: Un ideal I de un anillo R es *finitamente generado* si existen $a_1, a_2, ..., a_n \in I$ tales que

$$I = \{r_1 a_1 + \cdots + r_n a_n \mid r_i \in R\}.$$

13. Sea R un anillo. Demuestre que R es Noetheriano si y solo si todo ideal de R es finitamente generado.

14. Considere el morfismo inclusión $i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$. Sea R otro anillo y $f, g : \mathbb{Q} \to R$ otros dos morfismos anillos tales que $fi = gi$. Demuestre que $f = g$.

15. Sea p un número primo. Demuestre que en un anillo R de característica p se cumple que $(a + b)^p = a^p + b^p$ para todo $a, b \in R$.