Algebra Moderna 2
Tarea 2

Prof. Mauricio Medina

1. Si $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ es mónico y divide a un polinomio mónico $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$, entonces $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

2. Sea R un DFU con campo de fracciones Q y suponga que $\alpha \in Q$. Pruebe que es posible escribir $\alpha = \frac{a}{b}$ con $a, b \in R$ y tal que $\text{mcd}(a, b) = 1$.

3. Sea R un DFU con campo de fracciones Q. Sean $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in R[x]$ y $\frac{a}{b} \in Q$ con mcd(a, b)=1. Si $f(\frac{a}{b}) = 0$, entonces $a|a_0$ y $b|a_n$.

4. Sea R un DFU con campo de fracciones Q. Si $f(\alpha) = 0$ con $f \in R[x]$ mónico y $\alpha \in Q$, entonces $\alpha \in R$.

5. Si K es cualquier campo, demuestre que hay un número infinito de polinomios irreducibles en $K[x]$.

6. Sea R un anillo. Demuestre que $R[x]$ es un DIP si y solo si R es campo.

7. Demuestre que el $x^5 + x^2 + 1$ polinomio es irreducible en $\mathbb{Z}[x]$.

8. Demuestre que el polinomio $x^4 + 3x + 4$ es irreducible en $\mathbb{Z}[x]$.

9. Sea K un campo y $g, h \in K[x]$ dos polinomios primos relativos de grado positivo. Sea y otra indeterminada y sea E el campo de fracciones del dominio $K[y]$. Así $K \subseteq K[y] \subseteq E$ y podemos ver $g, h \in E[x]$. Definimos $f(x) \in E[x]$ como $f(x) = g(x) - yh(x)$. Muestre que $f(x)$ es irreducible en $E[x]$.

10. Sea R un subanillo de un campo K. Muestre que existe un único subcampo Q de K con $R \subseteq Q$ tal que Q es un campo de fracciones de R.

11. Sea K un campo con un número infinito de elementos y sean $f(x), g(x) \in K[x]$ tales que para toda $\alpha \in K$ se tiene que $f(\alpha) = g(\alpha)$. Muestre que $f(x) = g(x)$.

12. Encuentre un campo finito K y dos polinomios distintos $f(x), g(x) \in K[x]$ tales que $f(\alpha) = g(\alpha)$ para toda $\alpha \in K$.

Definición: Un campo F de característica p se dice que es *perfecto* si la función $(\ )^p : F \to F$ (elevar a la p) es suprayectiva.

13. Muestre que todo campo finito es perfecto.

14. Sea F un campo arbitrario de característica $p \neq 0$. Muestre que el campo $F(x)$ no es perfecto.

15. Sea K un campo y $f(x) \in K[x]$ irreducible de grado p un número primo. Sea $K \subset E$ una extensión de campos con $[E : K] < \infty$. Si $f(x)$ no es irreducible en $E[x]$ entonces $p|[E : F]$.