Tarea 3

Prof. Mauricio Medina

1. Sea $F \subseteq E \subseteq L$ campos y suponga que $\alpha \in L$ es algebraico sobre F. Sea $f = \min_E(\alpha)$.

   a) Muestre que todas las raíces de f en cualquier extensión de L son algebraicas sobre F.

   b) Muestre que todos los coeficientes de f son algebraicos sobre F.

2. Sea $f \in F[x]$ con $gr(f) = n$ y sea $E \supseteq F$ el campo de descomposición de f sobre F. Muestre que $[E : F] \leq n!$.

3. Sea $f(x) = x^3 + 7x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$. Este polinomio es irreducible. Sea $E = \mathbb{Q}[\alpha]$ para alguna raíz α de f. Considere los siguientes dos elementos de E: $\beta_1 = \alpha + 3$ $\beta_2 = \alpha^2 + 1$.

   a) Encuentre $\min_{\mathbb{Q}}(\beta_1)$ y exprese β_1^{-1} y $\beta_1\beta_2$ como $g(\alpha)$ para un polinomio $g(x) \in \mathbb{Q}$.

   b) Encuentre $\min_{\mathbb{Q}}(\beta_2)$ y exprese β_2^{-1} y $\beta_1\beta_2$ como $g(\alpha)$ para un polinomio $g(x) \in \mathbb{Q}$.

4. Muestre que toda extensión de grado 2 es normal.

5. De un ejemplo de una extensión de $\mathbb{Q}$ que **no** sea normal.

6. Sea F un campo de caracteristica $p > 0$ y considere el campo de fracciones $E = F(y)$ del dominio entero $K[y]$. Muestre que el polinomio $x^p - y \in E[x]$ es irreducible y no es separable.

7. Sea $F \subseteq L$ y suponga que K y E son campos intermedios tal que E es Galois sobre F y $E \cap K = F$. Si $\alpha \in K$ es algebraico sobre F y $f = \min_F(\alpha)$, entonces f es irreducible en $E[x]$.

8. Sea $F \subseteq E$ una extensión de campos. Muestre que E es normal sobre F si y solo si E es la unión de todos los campos intermedios K ($F \subseteq K \subseteq E$) tales que K es un campo de descomposición sobre F para algún polinomio en $F[x]$.

   Def. Sea $F \subseteq E \subseteq L$ con L normal sobre F. Decimos que L es una *cerradura normal de E sobre* F si ninugun campo K con $E \subseteq K \subset L$, es normal sobre F.

9. Sea $F \subseteq E$ una extensión de grado finito y sea $L \supseteq E$ un campo de descomposición sobre F para algún polinomio $g \in F[x]$ con la propiedad de que cada factor irreducible en $F[x]$ de g tiene una raíz en E. Muestre que L es una cerradura normal de E sobre F.

10. En la situación del ejercicio anterior, suponga que E es separable sobre F. Muestre que $L \supseteq F$ es de Galois y que $[L : F]$ divide a $[E : F]!$.

11. Sea $f, g \in F[x]$ y suponga que $E \supseteq F$ es un campo de descomposición sobre F tanto para f como para g. Muestre que f es separable sobre F si y solo si g es separable sobre F.

12. Sea $F \subseteq E$ una extensión normal de grado finito y sean K y L campos intermedios. Suponga que E es separable sobre K y sobre L. Muestre que E es separable sobre $K \cap L$.

13. Sea E una cerradura algebraica de F y suponga que E es separable sobre F. Muestre que $Fix(Gal(E/F)) = F$.

14. Sea E el campo de descomposición del polinomio $x^4 - 2$ sobre $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{C}$. Muestre que $E = \mathbb{Q}[i + \sqrt[4]{2}]$.

15. Sea $E = \mathbb{Q}[i + \sqrt[4]{2}]$. El grupo $G = Gal(E/\mathbb{Q})$ tiene un único subgrupo cíclico de orden 4. Encuentre el campo intermedio correspondiente a este subgrupo.

16. Sea E una cerradura algebraica de F y sea $F \subseteq K \subseteq E$ con K Galois sobre F. Muestre que la restricción de automorfismos de E a K define un morfismo suprayectivo de $Gal(E/F)$ en $Gal(K/F)$.

17. Sea $F \subseteq E$ una extensión de Galois y sean K y L campos intermedios. Muestre que K y L son F-isomorfos si y solo si los subgrupos de $G = Gal(E/F)$ correspondientes a K y a L son conjugados en G.

18. Sea $F \subseteq E$ una extensión algebraica. Sea $G = Gal(E/F)$. Muestre que la intersección de todos los subgrupos normales de indice finito de G es trivial.

19. Sea $E = F(X_1, \ldots, X_n)$ (Campo de funciones racionales) donde X_i son indeterminadas distintas y sea $\Omega = \{X_1, \ldots, X_n\} \subseteq E$. Sea $G = \{\sigma \in Gal(E/F) \mid \sigma(\Omega) = \Omega\}$. Muestre que G es un subgrupo de $Gal(E/F)$ isomorfo a $S_n \cong Sym(\Omega)$.

20. Sea G un grupo finito y F cualquier campo. Muestre que existen campos L y E con $F \subseteq L \subseteq E$ donde E es Galois sobre L con $Gal(E/L) \cong G$.

21. Sea $\alpha = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ en $\mathbb{C}$ y sea $f = \min_{\mathbb{Q}}(\alpha)$.

    a) Calcule f.

    b) Sea E el campo de descomposición de f sobre $\mathbb{Q}$. Calcule $[E : \mathbb{Q}]$.

c) Muestre que $Gal(E/\mathbb{Q})$ es cíclico de orden 4.

22. Muestre que $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}) = 1$.

Hints:

- Para el ejercicio 6 usen el Criterio de Einsenstein.
- Para el ejercicio 9, recuerden que todo F-isomorfism fija a los campos de descomposición y que cualquier campo dedescomposición da una extensión normal.
- Para el ejercicio 10 usen el siguiente resultado de grupos:

  Teorema: Sea $H \leq G$ con $[G : H] = n$. Entonces existe $N \lhd G$ tal que:

  (a) $N \subseteq H$, y

  (b) $[G : N]$ divide a $n!$.
- Para el ejercicio 14, encuentre al menos cinco elementos distintos en la orbita de $i + \sqrt[4]{2}$ bajo $Gal(E/\mathbb{Q})$.
- Para el ejercicio 22, si $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{R})$ y $a \in \mathbb{R}$ con $a > 0$, muestre que $\sigma(a) > 0$.
- Para el ejercicio 20, use el ejercicio 19.