

Tarea 3  
Algebra Lineal Aplicada II  
Prof. Mauricio Medina

*Esta tarea **no se entrega**. Está pensada como una guía de estudio para el examen parcial. Cualquier duda se puede resolver en el salón de clases o en el horario de oficina, tanto con el profesor como con el ayudante.*

1. Sean  $V$  y  $U \leq W$  espacios vectoriales y sea  $f : V \rightarrow W$  una transformación lineal. Vea que el siguiente suconjunto de  $V$  es un subespacio

$$L = \{v \in V \mid f(v) \in U\}.$$

A este subespacio se le llama la *imagen inversa de  $U$  bajo  $f$* .

2. Vea que las siguientes funciones son transformaciones lineales.

a)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $f(x, y) = (2x + y, x)$ .

b)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $f(x, y) = (0, x)$ .

c)  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n$ .

d)  $f : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_3(\mathbb{R})$  definida por  $f(p(x)) = xp(x) + p'(x)$ .

e)  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow P_2(\mathbb{R})$  definida por  $f(a, b, c) = c + bx + ax^2$ .

f)  $f : M_{2 \times 3}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$  definida como  $f(A) = BA$  donde  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

3. Para las transformaciones lineales del ejercicio anterior, calcule su núcleo e imagen. Además de una base y la dimensión de estos subespacios.
4. Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una transformación lineal tal que  $f(1, 0) = (1, 4)$  y  $f(1, 1) = (2, 3)$ . ¿Cuál es el valor de  $f(1, 5)$ ?
5. De una transformación lineal  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $f(1, 1) = (1, 0, 2)$  y  $f(2, 3) = (1, -1, 4)$ .
6. De dos transformaciones lineales distintas  $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tales que  $Nuc f = Nuc g = \{(x, y, z) \mid 2x - y + z = 0\}$ .
7. Vea que si  $f : V \rightarrow W$  es una transformación lineal biyectiva entonces  $f^{-1} : W \rightarrow V$  también es una transformación lineal.
8. Sea  $V$  un  $K$ -espacio vectorial. Definimos el siguiente conjunto

$$Hom_K(V, K) = \{f : V \rightarrow K \mid f \text{ es transformación lineal}\}.$$

Dadas  $f, g \in Hom_K(V, K)$ , definimos  $(f + g)(v) = f(v) + g(v)$  y si  $k \in K$ , definimos  $(kf)(v) = kf(v)$ .

a) Vea que con las operaciones anteriores  $Hom_K(V, K)$  es un  $K$ -espacio vectorial.

b) Sea  $w \in V$  un vector fijo. Definimos la función  $ev_w : Hom_K(V, K) \rightarrow K$  como  $ev_w(f) = f(w)$ . Vea que  $ev_w$  es una transformación lineal.

9. Considere la siguiente base de  $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$

$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Se define la función  $f : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^4$  como  $f(A) = [A]_\beta$  (el vector de coordenadas de  $A$ ). Vea que  $f$  es una transformación lineal biyectiva y de su inversa.