Tarea 5
Algebra Lineal Aplicada II
Prof. Mauricio Medina

Esta tarea ***no se entrega****. Está pensada como una guía de estudio para el examen parcial. Cualquier duda se puede resolver en el salón de clases o en el horario de oficina, tanto con el profesor como con el ayudante.*

1. Para las siguientes matrices, determinar su polinomio característico, sus valores propios y la dimensión de los espacios propios asociados. Concluya si la matriz es diagonalizable o no.

   a) $A = \begin{pmatrix} 13 & 30 \\ -6 & -14 \end{pmatrix}$

   b) $A = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 9 & -17 \end{pmatrix}$

   c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 18 & -9 & 8 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

2. De la descomposición espectral de las siguientes matrices simétricas.

   a) $A = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 9 & -17 \end{pmatrix}$

   b) $A = \begin{pmatrix} 6 & -30 \\ -30 & -19 \end{pmatrix}$

   c) $A = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 0 \\ 9 & -17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. Para la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ calcule su polinomio característico $p_A(\lambda)$ y verifique que $p_A(A) = 0$ la matriz cero de 3×3.

   Este es un resultado en general conocido como el *Teorema de Cayley-Hamilton* que se enuncia de la siguiente manera:

   Teorema. Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ con polinomio característico $p_A(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0)$. Entonces
   $$p_A(A) = (-1)^n(A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0) = 0 \in M_{n\times n}(\mathbb{R}).$$

   Es decir, la matriz satisface su polinomio característico.

4. En $\mathbb{R}^2$, sea RL_α la reflexión respecto a la recta con pendiente α. De una base de vectores propios para $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

5. En $\mathbb{R}^2$, halle los valores y vectores propios de R_θ, la rotación con ángulo θ cuando $\theta = \frac{\pi}{6}$.

6. Calcule A^{10} con $A = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 9 & -17 \end{pmatrix}$

7. Encuentre los valores y vectores propios de $A = \begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}20 \\ 0{,}15 & 0{,}80 \end{pmatrix}$ y úselos para calcular $\lim_{n\to\infty} A^n$.

8. Dada la forma cuadrática $f(x, y) = \frac{1}{5}x^2 - \frac{24}{5}xy - \frac{6}{5}y^2$ encuentre una base ortonormal en la que la forma cuadrática no tenga términos cruzados.

9. Hallar la exponencial de la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.